Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Казейкина Анна Васильевна

Асимптотическое при больших временах поведение решений некоторых аналогов уравнения Кортевега-де Фриза

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011 г.

Работа выполнена в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова на кафедре системного анализа факультета Вычислительной математики и кибернетики.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор Шананин Александр Алексеевич.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
профессор Фаминский Андрей Вадимович;

кандидат физико-математических наук,
доцент Розанова Ольга Сергеевна.

Ведущая организация — Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН.

Защита состоится 28 марта 2012 г. в 15 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, $2^{\text{ой}}$ учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан "____" ____________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

описывает процессы, происходящие в бездиссипативной среде с малой нелинейностью и дисперсией. Оно возникло в гидродинамике в конце XIX века, однако особенное внимание исследователей уравнение КдФ привлекло во второй половине XX века в связи с открытием точного метода интегрирования данного уравнения — метода обратной задачи рассеяния для стационарного уравнения Шредингера (C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, 1967). Применение данного метода позволило проанализировать асимптотическое при больших временах поведение решения данного уравнения. Оказалось, что асимптотика решения задачи Коши с убывающими начальными данными предсталяет собой совокупность солитонов — решений, распространяющихся и взаимодействующих с сохранением формы. Солитоны играют важную роль и в решении задачи о распаде ступеньки для уравнения КдФ: согласно исследованиям А.В. Гуревича, Л.П. Питаевского, В.В. Авилова, С.П. Новикова ударной волне бездисперсионной и бездиссипативной гидродинамики в этом случае соответствует бегущая волна с солитоноподобными осцилляциями на переднем фронте. В целом традиционно вопрос о существовании и поведении бегущих волн (в частности, солитонов) занимает центральное место в теории дисперсионных нелинейных сред.

При описании явлений в средах, обладающих как дисперсией, так и диссипацией используется вязкостный аналог уравнения КдФ — уравнение Кортевега-де Фриза-Бюргерса (КдФБ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - bu_{xx} = 0, \quad b > 0.$$

Данное уравнение встречается, например, в следующих областях:

- описание слабых ударных волн в плазме при учете электронной и ионной вязкости;
- описание продольных волн в вязкоупругом стержне;
- гидродинамические модели транспортных потоков (модель Лайтхилла-Уизема-Ричардсa);

- дифференциальные аналоги дифференциально-разностных моделей математической экономики (модель Полтеровича-Хенкина);
- задача о стационарной структуре разрывов решений нелинейных гиперболических уравнений.

Присутствие вязкостного члена существенно изменяет поведение решения рассматриваемого уравнения. Например, в работе C.J. Amick, J.L. Bona, M.E. Schonbek (1989) показано, что наличие диссипации препятствует образованию солитонов: решение задачи Коши с убывающими начальными данными для КдФБ равномерно стремится к нулю с течением времени. Более сложным образом взаимодействуют диссипация и дисперсия в случае задачи о распаде ступеньки. В работе П.И. Наумкина, И.А. Шишмарева (1991) показано, что при выполнении некоторого соотношения на коэффициенты дисперсии и диссипации бегущая волна для уравнения КдФБ ведет себя подобно бегущей волне для бездисперсионного аналога этого уравнения - уравнения Бюргерса, в частности, является монотонной. В случае же если указанное соотношение на коэффициенты нарушается, дисперсия в уравнении проявляется в виде осцилляций бегущей волны по пространственной координате.

Необходимо отметить, что в целом ряде задач уравнение Кортевега-де Фриза-Бюргерса возникает как представитель целого семейства квазилинейных уравнений (включающего, в частности, уравнение типа закона сохранения и уравнение Бюргерса), члены которого представляют собой, например, дифференциальные аналоги одного дифференциально-разностного уравнения. Поэтому актуальной является задача исследования того, насколько похоже поведение решений уравнений из данного семейства.

С этой точки зрения особенно интересным является рассмотрение так называемого обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса

$$u_t + (f(u))_x + u_{xxx} - bu_{xx} = 0$$

с неквадратичной функцией потока $f(u)$, возникающей, в основном, вне рамок задач гидродинамики. Как свидетельствуют результаты численного моделирования А.Г. Куликовского, А.П. Чугайновой (2004-2010) именно при рассмотрении неквадратичной функции потока наиболее существенно проявляется воздействие дисперсии в уравнении, приводящее к таким явлениям, как отсутствие решения типа бегущей волны для уравнения КдФБ или появление в асимптотике нестационарных периодических структур. Таким образом, важно было бы получить некоторые аналитические результаты о взаимодействии дисперсии/диссипации в вязкостном аналоге уравнения КдФ с неквадратичной функцией потока.

Случай, когда диссипация в обобщенном уравнении КдФБ доминирует над дисперсией был исследован в работах H. Engler (2002), J. Pan, H. Liu (2003), H. Yin, H. Zhao, L. Zhou (2009). В данных работах были получены условия, при которых бегущая волна для обобщенного уравнения КдФБ со строго выпуклой функцией потока существует, монотонна и локально устойчива. В связи с этим, основной интерес представляет изучение ситуации, когда наличие дисперсии вносит качественный вклад в поведение решение обобщенного уравнения КдФБ, например, в виде немонотонности бегущей волны для данного уравнения.

При построении обобщений уравнения КдФ на более высокие размерности возникают различные аналоги данного уравнения. Так, известное уравнение Кадомцева-Петвиашвили получается при учете небольших возмущений решения уравнения КдФ по второй координате. Однако наиболее естественным математическим $(2+1)$-мерным обобщением уравнения КдФ является уравнение Веселова-Новикова

$$\begin{aligned} &\partial_t v = 4\mathrm{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw) - E\partial_z w), \\ &\partial_{\bar{z}} w = -3\partial_z v, \quad v = \bar{v}, \quad E \in \mathbb{R}, \quad z = x_1 + ix_2. \end{aligned}$$

Кроме того, что данное уравнение при $v = v(x_1, t)$, $w = w(x_1, t)$ сводится к классическому уравнению КдФ, оно к тому же является интегрируемым с помощью метода обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера при фиксированной энергии. Наконец, при $E \to \pm\infty$ уравнение Веселова-Новикова сводится к уравнениям Кадомцева-Петвиашвили I и II соответственно.

При исследовании задачи рассеяния для двумерного оператора Шредингера С.В. Манаковым (1976) была обнаружена невозможность построения нетривиальной пары Лакса для данного оператора. Однако в той же работе было продемонстрировано, что данная проблема решается изучением задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера при фиксированной энергии. Задача построения теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера при фиксированной энергии была решена в цикле работ П.Г. Гриневича, С.В. Манакова, Р.Г. Новикова, С.П. Новикова. Построение данной теории открыло возможность для детального исследования асимптотического поведения решения уравнения Веселова-Новикова.

Первые солитоны для уравнения Веселова-Новикова на положительном уровне энергии были построены П.Г. Гриневичем и В.Е. Захаровым (1986). Р.Г. Новиковым (2010) было доказано, что, как и в одномерном случае, солитоны уравнения Веселова-Новикова являются прозрачными потенциалами. С другой стороны, в этой же работе Р.Г. Новикова продемонстрировано одно существенное отличие солитонов уравнения Веселова-Новикова от солитонов уравнения КдФ: для уравнения Веселова-Новикова при положительной энергии не существует экспоненциально локализованных солитонов.

Необходимо отметить, однако, что, несмотря на свою очевидную математическую значимость, уравнение Веселова-Новикова, в отличие от уравнения Кадомцева-Петвиашвили, оказалось относительно мало исследованным, а потому представляет весьма актуальную задачу теории нелинейных интегрируемых систем.

Цель работы. При исследовании вязкостного аналога уравнения КдФ — уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса — предполагается исследовать взаимодействие диссипационной и дисперсионной составляющей уравнения. Данное исследование проводится на основе анализа существования/устойчивости бегущей волны для уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса.

При рассмотрении двумерного обобщения уравнения КдФ — уравнения Веселова-Новикова — исследуется, как изменяются свойства данного нелинейного интегрируемого уравнения при переходе к более высокой размерности. Прежде всего, рассматриваются решения, построенные по методу обратной задачи для двумерного уравнения Шредингера. В случае, когда уравнения задачи рассеяния не являются всюду разрешимыми, основной целью исследования является выяснение возможности существования бегущих волн (солитонов) для уравнениия Веселова-Новикова.

Общая методика исследования. Изучение вопроса существования бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ проводится при помощи исследования фазовых траекторий двумерной динамической системы. При доказательстве локальной устойчивости бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса используется метод построения энергетических оценок, предложенный П.И. Наумкиным, И.А. Шишмаревым (1991) и основанный на использовании неравенств типа Колмогорова между нормами функции и ее производных.

Исследование асимптотического поведения решения уравнения Веселова-Новикова проводится на основе метода обратной задачи рассеяния для двумерного оператора Шредингера при фиксированной энергии, развитого в работах П.Г. Гриневича, С.В. Манакова, Р.Г. Новикова, С.П. Новикова. В регулярном случае основной вклад в асимптотику вносит решение линеаризованного уравнения Веселова-Новикова, оценка которого проводится при помощи обобщения метода стационарной фазы, равномерного по значениям параметра, принадлежащим неограниченной области. При отсутствии предположения о разрешимости всюду уравнений задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера анализируется решение $\bar{\partial}$-задачи для модифицированного определителя Фредгольма интегральных уравнений задачи рассеяния.

Научная новизна. В работе получены теоретические результаты о существовании и устойчивости бегущей волны для уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса с произвольной выпуклой функцией потока. Был аналитически продемонстрирован новый эффект, отличающий обобщенное уравнение КдФБ от обобщенного уравнения Бюргерса и уравнения КдФБ с квадратичной функцией потока: отсутствие бегущей волны. Результаты П.И. Наумкина, И.А. Шишмарева о локальной устойчивости монотонной и немонотонной бегущей волны перенесены на случай произвольной нестрого выпуклой функции потока, а также получена оценка скорости сходимости решения задачи Коши для обобщенного уравнения КдФБ к данной бегущей волне.

В работе получен ответ на вопрос об асимптотическом поведении решений уравнений Веселова-Новикова при ненулевой энергии (решений, являющихся прозрачными потенциалами в случае положительной энергии) в предположении о разрешимости всюду уравнений прямой и обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера: показано, что данные решения равномерно убывают с течением времени; построена оценка скорости убывания.

В работе получены первые результаты о солитонах уравнения Веселова-Новикова на неположительном уровне энергии: доказано отсутствие экспоненциально убывающих солитонов на отрицательном уровне энергии и солитонов кондуктивного типа на нулевом уровне энергии.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер.

Исследование обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса вносит вклад в понимание взаимодействия дисперсионных и диссипационных процессов в нелинейных средах. Результаты о существовании и устойчивости бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ объясняют некоторые свойства асимптотического поведения решения данного уравнения, полученные численно в работах А.Г. Куликовского, А.П. Чугайновой. Результаты могут быть использованы при построении асимптотики на больших временах решения обобщенного уравнения КдФБ с произвольной выпуклой функцией потока.

Результаты об асимптотическом поведении решения уравнения Веселова-Новикова вносят вклад в теорию интегрируемых нелинейных систем, в частности, в понимание механизма формирования солитонов для нелинейных интегрируемых уравнений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах ВЦ РАН по квазилинейным уравнениям под руководством проф. А.А. Шананина (2009-2010 гг.), на семинаре "Квазилинейные уравнения и обратные задачи"под руководством проф. Г.М. Хенкина, проф. Р.Г. Новикова, проф. А.А. Шананина (2010-2011 гг.), на семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ по нелинейным уравнениям под руководством чл.-корр. РАН И.А. Шишмарева (2009 г.), на семинаре лаборатории прикладной математики (CMAP) Ecole Polytechnique во Франции (2011 г.), на семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством проф. А.В. Арутюнова (2011 г.), на семинаре “Методы решения задач математической физики” ВЦ РАН (2011 г.), на семинаре кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под руководством проф. А.С.Шамаева и доц. О.С.Розановой (2011 г.), на семинаре “Прикладные задачи системного анализа” под руководством академика А.Б. Куржанского (2011 г.), на 52й, 53й, 54й научных конференциях МФ-

ТИ (2009-2011 гг.), на международной конференции "Inverse problems and applications"во Франции (2011 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 8 печатных работ, в том числе 5 в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения. Основной текст работы изложен на 128 страницах, приложение занимает 20 страниц. Список литературы включает 72 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении обсуждается актуальность работы, дается краткий обзор результатов, связанных с темой работы, приводятся основные результаты, а также излагается структура работы.

Глава 1 посвящена изучению вопроса асимптотического поведения решения задачи Коши для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса.

В §1.1 рассматривается вопрос о существовании бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса. *В п. 1.1.1* приводится постановка задачи, основные определения и предварительные замечания. Рассматривается задача Коши для обобщенного уравнения КдФБ:

$$u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \lim_{x\to\pm\infty} u_0(x) = u_\pm. \tag{2}$$

Относительно данных задачи делаются следующие предположения:

(a) $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ (по умолчанию для определенности полагается $a > 0$);

(b) $u_+ < u_-$;

(c) $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $f(u)$ выпукла на (u_+, u_-) или удовлетворяет энтропийным условиям на (u_+, u_-).

Будем говорить, что функция $f(u)$ удовлетворяет на (u_+, u_-) энтропийным условиям, если выполнено условие

$$f(u) < f(u_-) + \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(u - u_-), \quad u \in (u_+, u_-).$$

В дальнейшем при предположении энтропийных условий мы будем также предполагать всюду, что

$$f'(u_+) < \frac{f(u_-) - f(u)}{u_- - u_+}, \quad f'(u_-) > \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}. \tag{3}$$

Под бегущей волной для обобщенного уравнения КдФБ понимается решение $u(x,t) = \varphi(x - \lambda t)$:

1. $\varphi(x - \lambda t)$ — решение обобщенного уравнения КдФБ;
2. $\lim\limits_{s\to-\infty} \varphi(s) = u_-$, $\exists \lim\limits_{s\to+\infty} \varphi(s) = u_+$;
3. $\exists \lim\limits_{s\to\pm\infty} \varphi'(s) = 0$, $\exists \lim\limits_{s\to\pm\infty} \varphi''(s) = 0$.

Лемма 1. *Если бегущая волна для уравнения КдФБ существует, то ее скорость определяется однозначно из условия*

$$\lambda = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}. \tag{4}$$

Введем обозначения $\Phi(\varphi) = f(\varphi) - \lambda\varphi + d$, $d = \lambda u_- - f(u_-)$. В данных обозначениях уравнение КдФБ для бегущей волны записывается в виде

$$a\varphi'' - b\varphi' + \Phi(\varphi) = 0.$$

Выпуклость функции $f(u)$ эквивалентна выпуклости функции $\Phi(u)$. Энтропийные условия на интервале (u_+, u_-) в терминах функции $\Phi(u)$ записываются следующим образом: $\Phi(u) < 0$, $u \in (u_+, u_-)$; условие (3) выглядит следующим образом: $\Phi'(u_+) < 0$, $\Phi'(u_-) > 0$.

В п. 1.1.2 формулируются условия, при которых поведение бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ аналогично поведению бегущей волны для обобщенного уравнения Бюргерса (или, иначе говоря, условия доминирования диссипации в обобщенном уравнении КдФБ над дисперсией).

Утверждение 1. *Пусть $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и функция $f(u)$ выпукла. Пусть, кроме того, выполнены условия*

$$\begin{aligned} &\frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, \ \textit{при } a > 0, \\ &\frac{b}{\sqrt{-a}} \geqslant 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, \ \textit{при } a < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда бегущая волна существует, единственна и монотонна.

В п. 1.1.3 изучение вопроса о существовании бегущей волны сводится к изучению поведения траектории динамической системы на плоскости.

Утверждение 2. *Бегущая волна для уравнения КдФБ существует тогда и только тогда, когда для динамической системы*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a}\psi, \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{b}{a}\psi - \Phi(\varphi). \end{cases} \tag{6}$$

сепаратриса S, входящая в седло $(u_+, 0)$ при $s \to +\infty$ из области $\{\varphi > u_+, \psi < 0\}$, при $s \to -\infty$ входит в точку $(u_-, 0)$.

В п. 1.1.4 демонстрируются отличия в условиях существования бегущей волны для обобщенного уравнения Бюргерса и обобщенного уравнения КдФБ. Известно, что для обобщенного уравнения Бюргерса необходимым и достаточным условием существования бегущей волны, удовлетворяющей условиям 2, 3 является выполнение энтропийного условия для функции $f(u)$ на интервале (u_+, u_-). Показывается, что в случае нарушения условия монотонности бегущей волны (5) выпуклости функции $f(u)$ на интервале (u_+, u_-) недостаточно для существования бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ. Также показывается, что при выполнении условия монотонности бегущей волны нельзя ослабить условие выпуклости функции потока $f(u)$, заменив его на энтропийное условие на интервале (u_+, u_-).

Прежде всего, формулируется достаточное условие отсутствия бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ.

Утверждение 3. *Пусть $\Phi(u)$ удовлетворяет энтропийным условиям на (u_+, u_-), выпукла на $(u_+, \hat{u})$ и монотонна на $(\hat{u}, u_-)$ для некоторого $\hat{u} \in (u_+, u_-)$. Пусть существует единственный корень u_* уравнения $\Phi(u) = 0$ на множестве (u_-, ∞). Пусть b достаточно мало, т.е. таково, что $\psi_- < 0$, где $\psi_- = \frac{a}{b-\alpha_+}\Phi_{\min} + b(u_- - \varphi_{\text{int}})$, $\alpha_+ = (b - \sqrt{b^2 - 4a\Phi'(u_+)})/2$, $\Phi_{\min} = \min\limits_{u\in(u_+,u_-)} \Phi(u)$, $u_{\min} = \operatorname{Argmin}_{u\in(u_+,u_-)}\Phi(u)$, φ_{int} — единственное решение уравнения $\Phi(\varphi) = b\,\Phi_{\min}/(b - \alpha_+)$ на отрезке $[u_{\min}, u_-]$. Тогда если*

$$u_* < u_- + \frac{\psi_-^2}{2(-b\psi_+ + a\Phi_{\max})}, \tag{7}$$

где $\Phi_{\max} = \max\limits_{u\in(u_-,u_*)} \Phi(u)$, $\psi_+ = \frac{a\Phi_{\min}}{b}$, то бегущей волны не существует.

Данное утверждение используется для построения явного примера отсутствия бегущей волны в случае, когда условие монотонности бегущей волны (5) нарушено, но функция потока $f(u)$ является выпуклой на интервале (u_+, u_-).

Пример 1. Уравнение

$$u_t + (f(u))_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0,$$

где

$$f(u) = \begin{cases} u^2 - 1, \quad u \in (-1, 1), \\ -96(u-1)(u - \frac{49}{48}), \quad u \in (1, +\infty) \end{cases} \tag{8}$$

не имеет решения вида $u(x,t) = \varphi(x - \lambda t)$, т.ч. $\varphi(s) \xrightarrow[s\to-\infty]{} 1$, $\varphi(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} -1$; $\varphi'(s) \xrightarrow[s\to\pm\infty]{} 0$, $\varphi''(s) \xrightarrow[s\to\pm\infty]{} 0$

Также построен пример, показывающий, что при выполнении условия монотонности бегущей волны условие выпуклости функции $f(u)$ на интервале (u_+, u_-) нельзя заменить на энтропийное условие на этом интервале.

Пример 2. Положим $a = 1$, $b = 1$, $u_+ = -1$, $u_- = 1$, $f(u) = u^2 - 1$ на интервале $(u_+, u_- - \Delta)$, где $\Delta < u_- - \varphi_{int}$. Далее выберем u_*: $\psi_- + b(u_* - u_-) = \psi^* < 0$. На множестве $(u_-, +\infty)$ положим $f_\varepsilon(u) = -\varepsilon(u - u_-)(u - u_*)$. На отрезке $[u_- - \Delta, u_-]$ доопределим $f(u)$ так, чтобы $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $f(u) < 0$ при $u \in [u_- - \Delta, u_-)$, $f(u)$ монотонна на $(u_- - \Delta, u_-$. Далее, основываясь на теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров задачи, можно показать, устремляя $\varepsilon \to 0$, что при достаточно малых ε в построенном примере не существует бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ.

Таким образом, при нарушении условия монотонности бегущей волны, поведение бегущей волны определяется уже не только поведением функции потока $f(u)$ на интервале (u_+, u_-). Имеет значение также поведение функции $f(u)$ на множестве $(u_-, +\infty)$. Таким образом, для обеспечения существования бегущей волны необходимо наложить некоторые дополнительные условия на поведение функции потока на этом интервале. *В п. 1.1.5* приводятся достаточные условия существования бегущей волны в случае, когда предполагается лишь выполнение энтропийных условий для функции $f(u)$

на интервале (u_+, u_-). Пусть $U_0 = \{u\colon \Phi(u) = 0, u > u_-\}$. Если $U_0 \neq \varnothing$, то вводится обозначение $u_* = \min\{u \in U_0\}$.

Утверждение 4. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет на (u_+, u_-) энтропийным условиям, и выполнено хотя бы одно из условий:*

1. $U_0 = \varnothing$;

2. $\int\limits_{u_+}^{u_*} \Phi(\varphi) d\varphi > 0$;

3. $\Phi_0 + \frac{b^2}{a}(u_* - u_-) > 0$, *где* $\Phi_0 = \min\limits_{u \in (u_+, u_-)} \Phi(u)$.

Тогда бегущая волна для обобщенного уравнения КдФБ существует.

Из данных условий, в частности, следует, что выпуклости функции $f(u)$ на всей вещественной прямой достаточно для существования бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ.

§1.2 работы посвящен вопросу устойчивости бегущей волны для обобщенного уравнения КдФБ. Устойчивость бегущей волны для уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса с квадратичной функцией потока была исследована в работе П.И. Наумкина, И.А. Шишмарева 1991г., где было показано, что монотонная бегущая волна и немонотонная бегущая волна (в случае небольшого нарушения условия монотонности бегущей волны) являются локально устойчивыми для КдФБ. Результаты данного раздела являются обобщением результатов П.И. Наумкина, И.А. Шишмарева на случай произвольной выпуклой функции потока.

Отметим, что локальная устойчивость монотонной бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса со строго выпуклой функцией потока была доказана в работах H.Engler (2002), J.Pan, H.Liu (2003). Тем не менее, в данной работе мы приводим доказательство этого результата при помощи метода, предложенного П.И. Наумкиным, И.А. Шишмаревым, т.к., во-первых, данный метод позволяет избавиться от требования строгой выпуклости функции потока, а во-вторых, что наиболее существенно, данный метод может быть применен в немонотонном случае.

В п. 1.2.1 вводятся обозначения, в терминах которых формулируются основные результаты главы:

$$w(x,t;\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{x}\left(u(\xi,t)-\varphi(\xi-\lambda t+\alpha)\right)d\xi,$$

$$w_{(n)}(x,t;\alpha)=\frac{\partial^n w(x,t;\alpha)}{\partial x^n},\quad J_n(t;\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}w_{(n)}^2(x,t;\alpha)dx,\quad J=J_0+J_n.$$

Далее приводятся неравенства между различными нормами функции и ее производных, играющие ключевую роль при доказательстве локальной устойчивости бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса. Для $\forall w\in H^{n+k}(\mathbb{R})$ справедливо

$$J_{i+k}\leqslant J_k^{\frac{n-i}{n}}J_{n+k}^{\frac{i}{n}},\quad k=0,1,\ldots;\ 0<i<n;\ n=2,3,\ldots \tag{9}$$

Для произвольной функции $w(x)\in H_1(\mathbb{R})$, такой что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2w^2(x)dx<\infty$, справедливы следующие неравенства

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|w(x)|\leqslant(4J_0J_1)^{1/4}, \tag{10}$$

$$\sup_{p\in\mathbb{R}}|\hat{w}(p)|\leqslant(16\pi^2J_0W_1)^{1/4}, \tag{11}$$

$$\sup_{p\in\mathbb{R}}|\hat{w}_p(p)|\leqslant(16\pi^2W_1W_3)^{1/4}, \tag{12}$$

где $\hat{w}(p)$ — преобразование Фурье функции $w(x)$: $\hat{w}(p)=\int\limits_{+\infty}^{-\infty}e^{-ipx}w(x)dx$,

$$W_1(t;\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2w^2(x,t;\alpha)dx,\quad W_3(t;\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^4w^2(x,t;\alpha)dx.$$

В конце пункта делаются некоторые дополнительные предположения, используемые при доказательстве теорем, но не ограничивающие общность рассуждений:

1. $b=1$, $a>0$;

2. производные $f^{(j)}(u)$, $j\leqslant 1$, являются ограниченными функциями на $\mathbb{R}$;

3. $\lambda=0$.

В п. 1.2.2 формулируется и доказывается теорема, являющаяся обобщением теоремы П.И. Наумкина, И.А. Шишмарева о локальной устойчивости монотонной бегущей волны для уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса на случай выпуклой функции потока. Под локальной устойчивостью бегущей волны понимается сходимость решения задачи Коши для обобщенного уравнения КдФБ к бегущей волне в случае, когда начальные данные представляют собой небольшое возмущение данной бегущей волны. Решение задачи Коши понимается в смысле п. 1.3, где формулируется и доказывается теорема существования и единственности решения задачи Коши для обобщенного уравнения КдФБ.

Теорема 1. *1. Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $f(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

(b) $f''(u) \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad f''(u) \not\equiv 0 \quad \forall u \in (u_+, u_-)$.

Пусть выполнены условия

$$\begin{cases} \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geqslant 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, \quad a > 0, \\ \dfrac{b}{\sqrt{-a}} \geqslant 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, \quad a < 0. \end{cases} \tag{13}$$

2. Пусть начальная функция $u_0(x)$ достаточно близка к бегущей волне в следующем смысле: существует α, такое что

$$w(x, 0; \alpha) \in H^\infty(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x, 0; \alpha)dx < \infty. \tag{14}$$

Тогда существует такое $c > 0$, что если для $H = H^n(\mathbb{R})$ при некотором натуральном $n \geqslant 3$

$$\| w(x, 0; \alpha) \|_H < c,$$

то решение задачи Коши (1)–(2) для уравнения КдФБ существует, единственно, и существует постоянная $A > 0$, такая что

$$\| w(x, t; \alpha) \|_H \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{15}$$

Из данной теоремы и неравенств (9), (10), в частности, следует и равномерная по $x \in \mathbb{R}$ сходимость соответствующего решения обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса к бегущей волне.

В п. 1.2.3 формулируется и доказывается теорема, являющаяся обобщением теоремы П.И. Наумкина, И.А. Шишмарева о локальной устойчивости немонотонной бегущей волны для уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса на случай выпуклой функции потока. Поскольку рассматриваются лишь небольшие возмущения условия монотонности, то смысл данного результата в том, что при переходе от монотонной бегущей волны к немонотонной не происходит потери свойства локальной устойчивости.

Теорема 2. *1. Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $f(u) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;

(b) $f''(u) \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad f''(u) \not\equiv 0 \quad \forall u \in (u_+, u_-)$.

2. Пусть начальная функция $u_0(x)$ достаточно близка к бегущей волне в следующем смысле: существует α, такое что

$$w(x,0;\alpha) \in H^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 w^2(x,0;\alpha)dx < \infty.$$

Тогда существует такое $c > 0$, что если для $H = H^n(\mathbb{R})$ при некотором натуральном $n \geqslant 3$

$$\| w(x,0;\alpha) \|_H^2 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x,0;\alpha)dx < c,$$

то решение задачи Коши (1)–(2) для уравнения КдФБ существует и единственно.

Существует такое $\varepsilon > 0$, что если

$$\begin{cases} 0 < 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda} - \dfrac{b}{\sqrt{a}} < \varepsilon, \quad a > 0, \\ 0 < 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)} - \dfrac{b}{\sqrt{-a}} < \varepsilon, \quad a < 0, \end{cases}$$

то существует постоянная $A > 0$, такая что

$$\| w(x,t;\alpha) \|_H \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{16}$$

Теоремы 1, 2 являются теоретическим подтверждением численных результатов А.Г. Куликовского, А.П. Чугайновой, согласно которым бегущая волна для обобщенного КдФБ оказывается устойчивой по отношению к возмущениям малой амлитуды.

В §1.3 формулируется и доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для обобщенного уравнения КдФБ с произвольной функцией потока $f(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$, производные которой, начиная со второй, ограничены.

Теорема 3. *1. Пусть $w_0(x) \in H^\infty(\mathbb{R})$, тогда для некоторого $T > 0$ существует единственное решение $w(x,t) \in C^\infty([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ следующей задачи Коши:*

$$\begin{cases} w_t + f(w_x + \varphi) - f(\varphi) + a w_{xxx} - w_{xx} = 0, \\ w(x,0) = w_0(x), \end{cases} \tag{17}$$

где $f(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f''(\cdot) \in D(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in D(\mathbb{R})$[1]*.*

2. Если норма решения $\| w(\cdot,t) \|_{H^3(\mathbb{R})}$ остается ограниченной с течением времени, то решение $w(x,t) \in C^\infty([0,+\infty); H^\infty(\mathbb{R}))$, т.е. существует в целом по времени.

Показывается, что доказательство существования и единственности решения задачи Коши, проведенное П.И. Наумкиным, И.А. Шишмаревым для уравнения КдФБ, может быть без существенных изменений перенесено на случай неквадратичной функции потока.

Глава 2 работы посвящена анализу асимптотического поведения решения уравнения Веселова-Новикова. **В §2.1** приводится постановка задачи для уравнения Веселова-Новикова

$$\begin{aligned} &\partial_t v = 4\mathrm{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw) - E\partial_z w), \\ &\partial_{\bar z} w = -3\partial_z v, \quad v = \bar v, \quad E \in \mathbb{R}, \\ &v = v(x,t), \quad w = w(x,t), \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{18}$$

[1] $D(\mathbb{R})$ — класс функций из $C^\infty(\mathbb{R})$, ограниченных вместе со всеми своими производными.

где обозначено

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \qquad (19)$$

Рассматриваются гладкие, убывающие решения данного уравнения:

$v, w \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}), \quad v(\cdot, t) \in C^3(\mathbb{R}^2) \quad \forall t \in \mathbb{R};$

$|\partial_x^j v(x,t)| \leqslant \dfrac{q(t)}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}} \quad |j| \leqslant 3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$ для некоторых $q(t) > 0, \varepsilon > 0$;

$w(x,t) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Уравнение Веселова-Новикова является наиболее естественным $(2+1)$-мерным аналогом классического уравнения КдФ. С одной стороны, при $v = v(x_1, t)$, $w = w(x_1, t)$ уравнение Веселова-Новикова сводится к уравнению КдФ. С другой стороны, уравнение Веселова-Новикова интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера

$$L\psi = E\psi, \quad L = -\Delta + v(z,t), \quad \Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}, \quad z = x_1 + ix_2. \qquad (20)$$

В частности, выполнение уравнения Веселова-Новикова гарантирует существование дифференциальных операторов A и B (третьего и нулевого порядков, соотвественно), таких что

$$\frac{\partial(L-E)}{\partial t} = [L-E, A] + B(L-E)$$

(так называемая $L-A-B$ тройка Манакова, аналог пары Лакса в одномерном случае). В данном виде уравнение было получено Манаковым (1976 г.), а в явном виде - С.П. Новиковым и А.П. Веселовым (1984 г.).

Согласно подходу, принятому в теории нелинейных интегрируемых систем, основное внимание уделяется вопросу существования/отсутствия солитонов для уравнения Веселова-Новикова. Решение (v, w) уравнения (18) является солитоном, если $v(x,t) = V(x - ct)$ для некоторого $c \in \mathbb{R}^2$ и $v \to 0$, $w \to 0$ при $|x| \to \infty$.

В §2.2 приведены необходимые для дальнейшего изложения результаты из теории рассеяния для двумерного уравнения Шредингера. Задача построения теории обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера была поставлена С.П. Новиковым. Основной вклад в решение этой задачи внесли П.Г. Гриневич, С.В. Манаков, Р.Г. Новиков, С.П. Новиков.

Рассмотрим уравнение (20) с потенциалом v, удовлетворяющим условию

$$\begin{aligned} &v(x) = \overline{v(x)}, \quad v \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \\ &|v(x)| < q(1+|x|)^{-2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,\ q > 0. \end{aligned} \tag{21}$$

В п. 2.2.1 рассматривается задача рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на положительном уровне энергии $E > 0$. Известно, что для любого $k \in \mathbb{R}^2$, такого что $k^2 = E$, существует единственное непрерывное решение $\psi^+(x,k)$ уравнения (20) со следующей асимптотикой

$$\begin{aligned} \psi^+(x,k) = e^{ikx} - i\pi\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} f\left(k, |k|\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{i|k||x|}}{\sqrt{|k||x|}} + \\ + o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \text{ при } |x| \to +\infty \quad \left(\text{равномерно по } \frac{x}{|x|}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

для некоторой априорно не заданной функции f. Функция $f = f(k,l), (k,l) \in \{k \in \mathbb{R}^2, l \in \mathbb{R}^2 \colon k^2 = l^2 = E\}$ из (22) называется амплитудой рассеяния потенциала $v(x)$. Потенциал v называется прозрачным, если его амплитуда рассеяния f тождественно равна нулю.

Поскольку в одномерном случае известно, что солитоны уравнения КдФ являются безотражательными потенциалами, в двумерном случае основной интерес представляют решения уравнения Веселова-Новикова, являющиеся прозрачными потенциалами. П.Г.Гриневичем и Р.Г. Новиковым (1995) были построены прозрачные потенциалы для двумерного уравнения Шредингера, принадлежащие классу Шварца. Связь между солитонами уравнения Веселова-Новикова и прозрачными потенциалами была найдена в работе Р.Г.Новикова (2011), где было показано, что солитонные решения уравнения Веселова-Новикова при положительной энергии, удовлетворяющие (21), являются прозрачными потенциалами.

На положительном уровне энергии амплитуды рассеяния, вообще говоря, недостаточно для восстановления потенциала из класса (21). Поэтому для (20) на положительном уровне энергии вводятся дополнительные данные рассеяния. При $k \in \mathbb{C}^2$, $k^2 = E$, $\mathrm{Im} k \neq 0$ рассматриваются решения уравнения (20), удовлетворяющие следующему асимптотическому условию

$$\psi(x,k) = e^{ikx}(1 + o(1)), \quad |x| \to \infty \tag{23}$$

(т.н. решения Фаддеева или экспоненциально растущие решения уравнения Шредингера). Раскладывая функцию $\psi(x,k)$ далее по степеням x, получаем

$$\psi(x,k) = e^{ikx} - \pi \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(k_2\bar{k}_1)) e^{ikx} \left(\frac{a(k)}{-k_2x_1 + k_1x_2} + \frac{e^{-2i\mathrm{Re}kx} b(k)}{-\bar{k}_2x_1 + \bar{k}_1x_2} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)\right),$$

при $|x| \to \infty$. Функции $a(k)$, $b(k)$, определенные таким образом, представляют собой дополнительные данные рассеяния для (20).

Будем говорить, что уравнения прямой и обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на положительном уровне энергии всюду разрешимы, если решения $\psi(x,k)$ уравнения (20), удовлетворяющие условию (23), существуют при всех $k \in \mathbb{C}^2$, $k^2 = E$, $\mathrm{Im}k \neq 0$. В этом случае потенциал v однозначно восстанавливается по амплитуде рассеяния f и дополнительным данным рассеяния b. Отметим, что если потенциал v удовлетворяет некоторому условию малости нормы, то уравнения задачи рассеяния всюду разрешимы.

В п. 2.2.2 приводятся основные понятия теории рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на отрицательном уровне энергии $E < 0$. Прежде всего, отметим, что в этом случае для уравнения Шредингера нет понятия амплитуды рассеяния. Данные рассеяния вводятся следующим образом. При $k \in \mathbb{C}^2$, $k^2 = E$ рассматриваются решения уравнения (20), удовлетворяющие следующему асимптотическому условию

$$\psi(x,k) = e^{ikx}(1 + o(1)), \quad |x| \to \infty. \tag{24}$$

Раскладывая функцию $\psi(x,k)$ далее по степеням x, получаем

$$\psi(x,k) = e^{ikx} - \pi \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(k_2\bar{k}_1)) e^{ikx} \left(\frac{a(k)}{-k_2x_1 + k_1x_2} + \frac{e^{-2i\mathrm{Re}kx} b(k)}{-\bar{k}_2x_1 + \bar{k}_1x_2} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)\right),$$

при $|x| \to \infty$. Функции $a(k)$, $b(k)$, определенные таким образом, представляют собой данные рассеяния для (20) при $E < 0$.

Будем говорить, что уравнения прямой и обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на отрицательном уровне энергии всюду разрешимы, если решения $\psi(x,k)$ уравнения (20), удовлетворяющие условию (24), существуют при всех $k \in \mathbb{C}^2$, $k^2 = E$. В этом случае потенциал v однозначно восстанавливается по данным рассеяния b. Отметим, что если потенциал v удовлетворяет некоторому условию малости нормы, то уравнения задачи рассеяния всюду разрешимы.

В п. 2.2.3 приводятся основные понятия теории рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на нулевом уровне энергии $E = 0$. Как и в случае отрицательной энергии, в этом случае для уравнения Шредингера нет понятия амплитуды рассеяния. Данные рассеяния вводятся следующим образом. При $k \in \mathbb{C}$ рассматриваются решения уравнения (20), удовлетворяющие следующему асимптотическому условию

$$\psi(z,k) = e^{ikz}(1 + o(1)), \quad z = x_1 + ix_2, \quad |z| \to \infty. \tag{25}$$

Раскладывая функцию $\psi(z,k)$ далее по степеням z, получаем

$$\psi(z,k) = e^{ikz} - i\pi e^{ikz}\left(\frac{a(k)}{kz} + \frac{e^{-i(kz+\bar{k}\bar{z})}b(k)}{\bar{k}\bar{z}} + o\left(\frac{1}{|z|}\right)\right), \quad |z| \to \infty.$$

Функции $a(k)$, $b(k)$, определенные таким образом, представляют собой данные рассеяния для (20) при $E = 0$.

Будем говорить, что уравнения прямой и обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на нулевом уровне энергии всюду разрешимы, если решения $\psi(z,k)$ уравнения (20), удовлетворяющие условию (25), существуют при всех $k \in \mathbb{C}$. В этом случае потенциал v однозначно восстанавливается по данным рассеяния b. Основная отличительная особенность задачи рассеяния на нулевом уровне энергии состоит в том, что в общем случае даже при сколь угодно малых значениях нормы потенциала v функция $\psi(z,k)$ может быть не определена в точке $k = 0$.

В §2.3 изучается вопрос об асимптотическом поведении решения уравнения Веселова-Новикова при ненулевой энергии в предположении о разрешимости всюду уравнений прямой и обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера.

В п. 2.3.1 формулируется и доказывается теорема об асимптотическом поведении прозрачного решения уравнения Веселова-Новикова при положительной энергии.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

- $(v(x,t), w(x,t))$ *— решение уравнения Веселова-Новикова при* $E > 0$*;*
- $v(\cdot, 0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$*, где* $\mathcal{S}$ *обозначает класс Шварца;*
- $w(\cdot, 0) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$*,* $w(x,0) = o(1)$*,* $|x| \to \infty$*;*

- $v(\cdot,0)$ *— прозрачный потенциал при данной фиксированной энергии* E*;*
- *уравнения задачи рассеяния для* $v(x,0)$ *всюду разрешимы (например, если* $v(x,0)$ *удовлетворяет соответствующему условию малости нормы).*

Тогда

$$|v(x,t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}(v(\cdot,0))\ln(3+|t|)}{1+|t|}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^2$ *при* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*

Из данного результата, в частности, следует, что прозрачные решения Теоремы 4 не содержат солитонов. Отметим, что в одномерном случае, напротив, хорошо известны безотражательные гладкие экспоненциально локализованные солитоны уравнения КдФ.

Результат, аналогичный в некотором смысле Теореме 4, имеет место на отрицательном уровне энергии; этот результат формулируется и доказывается *в п. 2.3.2.*

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

- $(v(x,t), w(x,t))$ *— решение уравнения Веселова-Новикова при* $E<0$*;*
- $v(\cdot,0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$*;*
- $w(\cdot,0) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$*,* $w(x,0)=o(1)$*,* $|x|\to\infty$*;*
- *уравнения задачи рассеяния для* $v(\cdot,0)$ *(например, если* $v(x,0)$ *удовлетворяет соответствующему условию малости нормы).*

Тогда

$$|v(x,t)| \leqslant \frac{\mathrm{const}(v(\cdot,0))\ln(3+|t|)}{(1+|t|)^{3/4}}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^2$ *при* $\forall t \in \mathbb{R}$*.*

Эта оценка оптимальна (для некоторого $v(x,0)$ *существуют прямые* $x=ct$*, вдоль которых асимптотика* $v(x,t)$ *при* $t\to\infty$ *равна* $\frac{\mathrm{const}}{(1+|t|)^{3/4}}$ *для некоторой ненулевой* const*).*

В §2.4 при отсутствии предположения о разрешимости всюду уравнений обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера изучается более частный вопрос о существовании/отсутствии солитонов для уравнения Веселова-Новикова.

Несмотря на то, что класс решений уравнения Веселова-Новикова, рассмотренный в §2.3, достаточно широк, тем не менее, Теоремы 4, 5 не дают исчерпывающего ответа на вопрос о существовании/отсутствии солитонов для уравнения Веселова-Новикова. Действительно, солитоны уравнения Веселова-Новикова могут возникать в случае, когда уравнения задачи рассеяния разрешимы не при всех значениях спектрального параметра или, иначе говоря, когда данные рассеяния имеют особенности. Тем не менее, при отсутствии предположения о разрешимости уравнений задачи рассеяния, можно указать некоторые функциональные классы, в которых не существует солитонов уравнения Веселова-Новикова.

В п. 2.4.1 приводятся известные результаты о существовании и отсутствии солитонов для уравнения Веселова-Новикова на положительном уровне энергии. П.Г. Гриневичем, В.Е. Захаровым (1986) были построены прозрачные решения уравнения Веселова-Новикова при $E > 0$, являющие солитонами уравнения Веселова-Новикова, убывающими как $O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Р.Г. Новиков (2011) продемонстрировал, что, в отличие от одномерного случая, для уравнения Веселова-Новикова не существует экспоненциально локализованных солитонов.

В п. 2.4.2 результат Р.Г. Новикова об отсутствии экспоненциально локализованных солитонов для уравнения Веселова-Новикова на положительном уровне энергии переносится на отрицательный уровень энергии.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия:*

- $(v(x,t), w(x,t))$ *— решение уравнения Веселова-Новикова при* $E < 0$;
- $v, w \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $v(\cdot, t) \in C^3(\mathbb{R}^3)$;
- $v(x,t) = V(x - ct)$ *(пусть* v *—солитон);*
- $\partial_x^j V(x) = O\left(e^{-\alpha|x|}\right)$ *при* $|x| \to \infty$, $|j| \leqslant 3$ *и некотором* $\alpha > 0$; $w(x,t) \to 0$, $|x| \to \infty$.

Тогда $v \equiv 0$, $w \equiv 0$.

Отметим, что вопрос о существовании алгебраически убывающих солитонов для уравнения Веселова-Новикова на отрицательном уровне энергии является открытым.

В п. 2.4.3 доказывается теорема об отсутствии солитонов кондуктивного типа для уравнения Веселова-Новикова на нулевом уровне энергии.

Потенциал $v \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < 2$, называется потенциалом кондуктивного типа, если $v = \gamma^{-1/2}\Delta\gamma^{1/2}$ для некоторой вещественной положительной функции $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, такой что $\gamma \geqslant \delta_0 > 0$ и $\nabla\gamma^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Потенциалы кондуктивного типа естественно возникают в случае, когда задача о проводимости Кальдерона изучается при помощи задачи рассеяния для двумерного уравнения Шредингера на нулевом уровне энергии. Задача Гельфанда-Кальдерона подробно изучалась, например, в работах Р.Г. Новикова, А. И. Нахмана. В частности, А.И. Нахман доказал (1995), что для потенциалов кондуктивного типа уравнения задачи рассеяния всюду разрешимы. Данный результат позволяет получить следующее утверждение о солитонах кондуктивного типа для уравнения Веселова-Новикова:

Теорема 7. *Пусть выполнены следующие условия:*

- $(v(x,t), w(x,t))$ — *решение уравнения Веселова-Новикова при* $E = 0$*;*
- $v, w \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $v(\cdot, t) \in C^3(\mathbb{R}^3)$*;*
- $|\partial_x^j v(x,t)| \leqslant \frac{q(t)}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}$, $|j| \leqslant 3$ *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $q(t) \geqslant 0$*;* $w(x,t) \to 0$, $|x| \to \infty$*;*
- $v(x,t) = V(x - ct)$ *(пусть* v *— солитон);*
- v *— потенциал кондуктивного типа.*

Тогда $v \equiv 0$, $w \equiv 0$.

В Приложении настоящей работы приводятся доказательства некоторых вспомогательных лемм.

Основные результаты работы

1. Аналитически продемонстрировано, что в случае когда функция потока — произвольная выпуклая на (u_+, u_-) функция, может возникать новый эффект по сравнению с уравнением Бюргерса и уравнением КдФБ с квадратичной функцией потока: отсутствие бегущей волны. Данный эффект возникает при отказе от требования выпуклости функции $f(u)$

или от условия монотонности бегущей волны (условия, обеспечивающего монотонность бегущей волны, в случае если она существует).

2. Доказаны теоремы о локальной устойчивости монотонной и немонотонной бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса с произвольной нестрого выпуклой функцией потока.

3. Решена задача об асимптотическом поведении решения уравнения Веселова-Новикова при ненулевой энергии (решения, являющегося прозрачным потенциалом в случае положительной энергии) в регулярном случае. В случае отрицательной энергии доказана оптимальность полученной оценки.

4. Доказано отсутствие экспоненциально локализованных солитонов для уравнения Веселова-Новикова с отрицательной энергией и отсутствие солитонов кондуктивного типа для уравнения Веселова-Новикова с нулевой энергией.

Автор выражает благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Шананину и д.ф.-м.н. профессору Р.Г. Новикову за постановки задач и постоянное внимание к работе, а также д.ф.-м.н. профессору Г.М. Хенкину и к.ф.-м.н. доценту А.В. Гасникову за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

Работа поддержана грантами РФФИ № 08-07-00158, РГНФ № 08-02-00347. Работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (1.2.1, НК-15П(3)).

Публикации по теме диссертации

1. Казейкина А.В. Устойчивость решения уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса вида бегущей волны // Труды 52й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". Часть VII. Управление и прикладная математика. 2009, том 1, с.34-37.

2. Казейкина А.В. Устойчивость решения задачи Коши вида бегущей волны для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса // ЖВМиМФ, 2010, том 50, №4, с.725-745.

3. Казейкина А.В. Асимптотическое поведение прозрачных потенциалов для уравнения Веселова-Новикова при положительной энергии // Труды 53й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". Часть VII. Управление и прикладная математика. 2010, том 1, с.59-61.

4. Казейкина А.В. Асимптотическое по времени поведение решений уравнения Веселова-Новикова // Труды 54й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Управление и прикладная математика. 2011, том 1, с. 16-17.

5. Казейкина А.В. Примеры отсутствия бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса // Вестн. моск. ун-та, серия 15, 2011, №1, с.17-24.

6. Kazeykina A.V., Novikov R.G. A large time asymptotics for transparent potentials for the Novikov–Veselov equation at positive energy // J. Nonlinear Math. Phys., 2011, vol. 18(3), p.377-400.

7. Kazeykina A.V., Novikov R.G. Large time asymptotics for the Grinevich–Zakharov potentials // Bulletin des Sciences Mathématiques, 2011, vol. 135, p.374-382.

8. Kazeykina A.V., Novikov R.G. Absence of exponentially localized solitons for the Novikov-Veselov equation at negative energy // Nonlinearity, vol. 24, p.1821-1830.