Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Агальцов Алексей Дмитриевич

Исследование задач обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона и оператора Дирихле–Неймана

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения профессионального образования «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:	**Шананин Александр Алексеевич**, *д.ф.-м.н., профессор, декан факультета управления и прикладной математики МФТИ*
Официальные оппоненты:	**Пестов Леонид Николаевич**, *д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией трехмерной сейсморазведки и обратных задач волновых процессов НИИ прикладной информатики и математической геофизики БФУ им. И. Канта*
	Демченко Максим Николаевич, *к.ф.м.н., научный сотрудник лаборатории математических проблем геофизики Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН*
Ведущая организация:	*Центральный экономико-математический институт РАН*

Защита состоится 28 декабря 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д. 501.001.43* при *Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова* по адресу: *119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК, аудитория* ____.

С диссертацией можно ознакомиться Научной библиотеке Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова по адресу: *119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.*

Автореферат разослан ________________

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются вопросы обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона и для оператора Дирихле–Неймана. При этом оператор Дирихле–Неймана может рассматриваться как нелинейный аналог обобщённого преобразования Радона. Обобщённое преобразование Радона и оператор Дирихле–Неймана возникают во многих моделях математической экономики и математической физики, выступая в качестве измеряемых величин. При этом, как правило, обобщённое преобразование Радона линейно зависит от подлежащих определению параметров модели, тогда как оператор Дирихле–Неймана зависит от них нелинейно. Основными важными с прикладной точки зрения задачами для этих операторов являются задача определения по ним параметров модели (обращение) и задача описания образа этих операторов (характеризация). Сделаем несколько замечаний относительно моделей, в которых возникают эти задачи, и актуальности изучения этих задач.

Важной проблемой современной макроэкономики является проблема микрооснований. Ранние макроэкономические модели основывались на определённых предположениях о макроскопических величинах. Этот подход породил многочисленные споры о правомерности таких предположений и о соответствии этих предположений законам микроэкономики. В результате возникли макроэкономические модели, получающиеся агрегированием микроэкономических описаний.

В теории производственных функций первая модель такого типа была предложена Хаутеккером в работе [11]. В этой работе было показано, что производственная функция Кобба–Дугласа возникает как агрегированная производственная функция отрасли, состоящей из производственных единиц с леонтьевскими[1] технологиями производства в случае паретовского распределения ресурсов. Основываясь на модели из статьи [11], Иохансен в работе [12] предложил общий формализм для построения производственных функций отраслей, представимых как объединение производственных ячеек с леонтьевскими технологиями производства. В статье [10] было показано, что при достаточно общих условиях производственная функция отрасли имеет не более одного описания в рамках этой модели, а это описание может быть полу-

[1]Под леонтьевскими технологиями производства понимаются технологии с фиксированными пропорциями затрат производственных факторов

чено с помощью явной формулы.

Модель производства из работ [11, 12] оказалась полезной для исследования макроэкономических процессов в таких странах как Норвегия, Швеция, США, Индия, Япония и другие, см., например, [12, 25, 26]. В частности, эта модель оказалась хорошо приспособленной для учёта изменений в структуре производства в результате научно-технического прогресса, см. [12]. Однако область применимости этой модели ограничена производственными системами, удовлетворяющими определённым строгим критериям в терминах производственных функций, см. [10].

В 1990х-2000х мировая экономика столкнулась с вызовом глобализации. В этом процессе производители интегрируются в глобальные рынки через экспорт своей продукции и импорт ресурсов и технологий. При этом разница в темпах инфляции на внутренних и глобальных рынках приводит к тому, что доля импортируемых ресурсов, используемых в производстве, постоянно меняется. Это приводит к необходимости пересмотра и модификации агрегированных моделей производства, основанных на предположении о леонтьевских технологиях производства на микроуровне.

Пересмотр и модификация модели Хаутеккера–Иохансена были осуществлены в работах [19, 29, 28]. Модифицированная модель (которую мы будем называть обобщённой моделью Хаутеккера–Иохансена) представляет собой общий формализм для построения производственных функций отраслей, представимых как объединение производственных единиц с неоклассическими технологиями производства, допускающими замещение производственных факторов. Ответ на вопрос о целесообразности использования этой модели для описания производства в условиях глобализации во многом определяется тем, насколько просто решаются следующие задачи:

1. Характеризация тех отраслей производства, для которых возможно описание в рамках этой модели.
2. Характеризация тех отраслей, для которых это описание единственно. В случае единственности описания, его получение по макроуровневой информации (по производственной функции отрасли).

Эти задачи, в свою очередь, сводятся к задачам характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона, которое просто выражается через функцию прибыли в этой модели, см. [28] и [26, Глава 6].

Теперь сделаем несколько замечаний относительно моделей, в которых возникает изучаемый в диссертации оператор Дирихле–Неймана, и относительно актуальности изучения задачи обращения для этого оператора, называемой в литературе обратной задачей Дирихле–Неймана. Мы изучаем обратную задачу Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера (иногда называемого оператором типа Шрёдингера во внешнем поле Янга–Миллса), частным случаем которого является оператор Шрёдингера в магнитном поле. Изучение обратной задачи Дирихле–Неймана для оператора Шрёдингера восходит к работе [4].

Одним из приложений обратной задачи Дирихле–Неймана, мотивировавших настоящее исследование, является акустическая томография сред с течениями. В акустической томографии исследуемый объект зондируется с помощью акустических волн. Отражённые волны замеряются и используются в качестве исходных данных для нахождения параметров объекта. Изучаемый в диссертации случай соответствует ситуации, когда в качестве исследуемого объекта выступает неоднородная среда, в которой возможны течения (например, тело пациента или акватория океана). Акустические волны используются для извлечения информации как о скалярных неоднородностях среды (например, скорости звука), так и о векторных неоднородностях (течения). Рассматриваемая в диссертации модель акустической томографии сред с течениями рассматривалась в частных случаях в работах [22, 18, 17]. Эта задача имеет важные приложения в медицинской томографии и в томографии океана.

Изучаемая обратная задача Дирихле–Неймана также имеет приложения в квантовой теории рассеяния. В обратной задаче квантовой теории рассеяния пучки частиц используются для извлечения информации о потенциалах внешних полей, с которыми они взаимодействуют. Для этого на потенциал направляют пучок частиц с заданным волновым вектором и измеряют количество частиц, рассеивающихся в разных направлениях. Функция плотности вероятности обнаружить частицу в данном телесном угле, известная при разных волновых векторах падающих пучков частиц, используется в качестве исходных данных для нахождения потенциала. Рассматриваемый в диссертации случай соответствует рассеянию заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле (см. [6, 7]), а также рассеянию частиц с цветовым зарядом во внешнем поле Янга-Миллса (см., например, [20, 8]).

Цель работы. Основные цели работы могут быть кратко сформулированы следующим образом:

1. Получить условия характеризации обобщённого преобразования Радона, возникающего в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена.
2. Найти формулы обращения и критерии обратимости обобщённого преобразования Радона.
3. Получить условия обратимости оператора Дирихле–Неймана, возникающего в модели акустической томографии сред с течениями.
4. Предложить алгоритм приближённого решения обратной задачи Дирихле–Неймана.

Основные результаты.

1. Получены условия характеризации обобщённого преобразования Радона, обобщающие теорему Бернштейна характеризации преобразования Лапласа.
2. Получены критерии обратимости обобщённого преобразования Радона в терминах нулей преобразования Меллина функции, задающей гиперповерхности интегрирования. Получена явная формула обращения.
3. Указаны необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи Дирихле–Неймана, возникающей в модели акустической томографии движущейся жидкости.
4. Получены формулы и уравнения, сводящие обратную задачу Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии.
5. Предложен алгоритм приближённого решения соответствующей обратной задачи рассеяния. Приведена его линеаризованная версия в случае малых коэффициентов.

Теоретическая и практическая значимость. Первая часть настоящей работы посвящена развитию математического аппарата описания производства в отраслях в рамках формализма распределения мощностей по технологиям с учётом замещения ресурсов на микроуровне (т.е. в рамках обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена). Основным вкладом этой части работы можно считать следующие результаты:

1. Задача характеризации тех отраслей производства, для которых возможно описание с помощью формализма распределения мощностей по технологиям при учёте взаимного замещения ресурсов на микроуровне, сводится к явно проверяемым условиям (к теореме характеризации типа Бернштейна для обобщённого преобразования Радона).

2. Вопрос о единственности описания отрасли с помощью обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена сводится к проверке элементарного математического условия в терминах производственной функции отрасли на микроуровне. В случае единственности такого описания приводится явная формула получения микроописания отрасли (распределения мощностей по технологиям) по её макроописанию (по функции прибыли отрасли).

Вторая часть настоящей работы посвящена вопросам единственности и восстановления в обратной задаче Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера. В работе эта задача рассматривается в приложении к одной модели акустической томографии движущейся жидкости. Основным вкладом этой части работы являются следующие результаты:

3. Приводятся явные формулы и уравнения, сводящие задачу восстановления параметров жидкости по граничным измерениям при фиксированной частоте к многомерной обратной задаче рассеяния при фиксированной энергии.

4. Приводится алгоритм приближённого решения соответствующей обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии по модулю подходящих калибровочных преобразований.

5. Показывается, что идентифицируемость параметров жидкости по граничным измерениям при нескольких частотах определяется частотной зависимостью коэфициента поглощения. В случае идентифицируемости демонстрируется, как избавиться от калибровочной неединственности и восстановить параметры жидкости, используя граничные измерения при нескольких частотах.

Методы исследования. В диссертации используются различные методы функционального анализа и теории уравнений в частных производных. При решении задач обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона используются методы гармонического анализа (аналога теории преобразования Фурье) в $\mathbb{R}^n_+$. При этом аналогом преобразования Фурье выступает преобразование Меллина.

При решении обратной задачи Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера, в частности, используются теория Фредгольма в банаховых пространствах, метод нелокальной задачи Римана–Гильберта и глобальные теоремы единственности для уравнения Лапласа с линейными или нелинейными возмущениями первого порядка.

Научная новизна. В диссертациии продолжается исследование обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена, которая была предложена и начала исследоваться в работах [19, 29, 28]. Полученные теоремы обращения и характеризации для обобщённого преобразования Радона обобщают результаты из работы [10] на случай искривлённых поверхностей интегрирования, с одной стороны, и известную теорему Бернштейна–Бохнера о вполне монотонных функциях (см. [2]) со случая преобразования Лапласа на случай интегральных операторов типа Радона.

Рассматриваемая модель акустической томографии сред с течениями в различных частных случаях изучалась в работах [22, 17, 18] и [36]. В диссертации эта модель впервые рассматривается в случае, когда одновременно учитываются (а в некоторых из случаев, к тому же, предполагаются неизвестными) такие параметры жидкости, как скорость звука, скорость течения, плотность и коэффициент поглощения.

Формулы и уравнения, сводящие обратную задачу Дирихле–Неймана к обратной задаче рассеяния, обобщают формулы и уравнения из работ [23, 15, 16] на случай калибровочно-ковариантных операторов Шрёдингера. Эти результаты являются новыми даже в случае скалярных коэффициентов.

Описываемый в диссертации алгоритм решения обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии может рассматриваться как упрощённая и усовершенствованная версия алгоритма, упоминающегося в работе [14, с. 457] в случае самосопряжённых операторов Шрёдингера.

Публикации. По теме диссертации соискателем опубликовано 13 работ. Из них работы [41, 43, 44] опубликованы в российских журналах из перечня ВАК и не имеют соавторов. Работы [36, 32, 33, 37, 34] опубликованы в зарубежных журналах, включенных в Web of Science и/или Scopus. Из них работы [32, 33] не имеют соавторов, работы [36, 37] выполнены в нераздельном соавторстве с Р. Г. Новиковым и подготовлены во время стажировок соискателя в Ecole Polytechnique (Франция), а работа [34] выполнена в нераздельном соавторстве с Г. М. Хенкиным. Кроме того, работа [31] опубликована в недавно основанном журнале и не имеет соавторов, работы [38, 42] – тезисы докладов, а работы [39, 40] опубликованы в сборниках лучших курсовых и дипломных работ.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих международных конференциях и семинарах:

1. Конференция «МФТИ-55», 19.11-25.11.2012, г. Долгопрудный
2. Семинар «Quasilinear equations and inverse problems», 2.08.2013, Москва
3. Конференция «МФТИ-56», 25.11-30.11.2013, г. Долгопрудный
4. Семинар «Quasilinear equations and inverse problems», 4.08.2014, Москва
5. Конференция «МФТИ-57», 24.11-29.11.2014, г. Долгопрудный
6. Семинар «Inverse Problems» , 2.11.2015, Göttingen University, Германия
7. Конференция «Quasilinear equations, inverse problems and their applications», 30.11-01.12.2015, Долгопрудный
8. Семинар аспирантов, 22.01.2016, Ecole Polytechnique, Франция
9. Конференция «Inverse problems for PDEs», 29.03-01.04.2016, Бремен, Германия
10. Семинар «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», 23.05.2016, ЦЭМИ, Москва
11. Семинар «Прикладные задачи системного анализа», 30.05.2016, МГУ, Москва

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Эти пять глав можно разделить на две независимые части. Главы 1 и 2 посвящены исследованию обобщённого преобразования Радона, возникающего в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена. Основные результаты главы 1 опубликованы в работах [42] и [44], а главы 2 — в работе [43].

Главы 3–5 посвящены исследованию обратной задачи Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера и его частных случаев. Результаты главы 3 опубликованы в работах [33, 37, 31], главы 4 — в работе [32], а главы 5 — в работе [36].

Ниже мы кратко изложим содержание глав 1–5.

В **первой главе** диссертации мы определяем обобщённое преобразование Радона и интегральные операторы типа Радона и рассматриваем вопросы их непрерывности и характеризации. В **параграфе 1.1** мы приводим основные определения и постановки задач. Обобщённое преобразование Радона R_q определяется следующей формулой

$$(R_q f)(p) = \int_{q_p^{-1}(1)} f(x) \frac{dS_x}{|\nabla q_p(x)|}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1}$$

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}, \tag{2}$$

где $q_p(x) = q(p_1 x_1, \ldots, p_n x_n)$, ∇ — стандартный градиент по переменной x, dS_x — поверхностная мера на гиперповерхности $q_p^{-1}(1) = \big\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid q_p(x) = 1\big\}$, а функция q удовлетворяет следующим свойствам:

$$q \in C^1(\mathbb{R}^n_+),\ q > 0 \text{ и } q(\lambda x) = \lambda q(x) \text{ при } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3}$$

Оператор R_q является частным случаем обобщённого преобразования Радона в смысле [1]. Интегральные операторы R^h_q определяются формулой

$$(R^h_q \mu)(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} h\big(q(p_1 x_1, \ldots, p_n x_n)\big)\mu(dx), \quad p \in \mathbb{R}^n_+, \tag{4}$$

где $h \colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}$. В частности, случаю $h(t) = \max\{0, p_0 - t\}$ соответствует функция прибыли в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена:

$$(\Pi_q \mu)(p_0, p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \max\big\{0, p_0 - q(p_1 x_1, \ldots, p_n x_n)\big\}\mu(dx), \quad p_0 > 0,\ p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{5}$$

В этой модели величины в формуле (5) интерпретируются следующим образом. Функция q описывает (микроуровневые) технологии производства в терминах себестоимости единицы выпускаемой продукции, мера μ задаёт распределение мощностей по технологиям, а число p_0 и вектор p представляют собой цены за единицу выпускаемой продукции и производственных факторов, соответственно.

Свойства (3) описывают неоклассические технологии производства общего вида, допускающие замещение производственных факторов. Однако на практике технологии часто аппроксимируют стандартными функциями, идентифицируя параметры по статистическим данным. При этом выбор стандартных функций зависит от того, в какой мере производственные факторы друг друга замещают.

Наиболее используемая характеристика замещаемости ресурсов — эластичность их замещения. В общем случае её определение по статистическим данным затруднительно, и на практике делается предположение о её постоянности. Случай нулевой эластичности соответствует леонтьевским производственным технологиям, а случай единичной — производственной функции Кобба–Дугласа. Функция Кобба–Дугласа является простейшей и наиболее используемой на практике производственной функцией, допускающей замещение факторов, однако её область применения сильно ограничена. К примеру, имеются свидетельства, что в некоторых отраслях эластичность замещения труда и капитала может быть меньше одного. Как обобщение функции Кобба–Дугласа появилась так называемая производственная функция с постоянной эластичностью замещения (CES функция). CES-функциям соответствуют функции себестоимости вида $q = q_\alpha$, $\alpha \in [-\infty, 1]$, где

$$\begin{aligned} q_\alpha(x) &= C\big((a_1x_1)^\alpha + \cdots + (a_nx_n)^\alpha\big)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in (-\infty, 1] \setminus 0, \\ q_{-\infty}(x) &= C \min(a_1x_1, \ldots, a_nx_n), \\ q_0(x) &= Cx_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \end{aligned} \tag{6}$$

и C, a_1, …, $a_n > 0$, $a_1 + \cdots + a_n = 1$. К настоящему времени CES-функции завоевали популярность в теории производства, где они заменяют функции Кобба–Дугласа. Однако важным недостатком CES-функций является то, что они предполагают постоянную эластичность замещения между любой парой производственных факторов. К. Сато предложил рассматривать вложенные CES производственные функции, позволяющие учитывать различные эластичности замещения между производственными факторами в различных группах.

В диссертации рассматривается класс технологий с CES функциями себестоимости q и более общий класс производственных технологий, описываемых функциями себестоимости q вида (3), удовлетворяющими условию, что

$$\textit{множества уровня функции } q \textit{ ограничены.} \tag{7}$$

Заметим, что класс технологий, описываемых функциями q вида (3), (7), содержит линейные функции с положительными коэффициентами, CES-функции q_α с $\alpha \in (0, 1]$ и замкнут относительно композиции по части производственных факторов.

Мы рассматриваем задачи характеризации и обращения для операторов R_q и R_q^h, которые формулируются следующим образом:

Задача 1 (характеризация)**.** Найти необходимые и достаточные условия на функцию F, при которых она представима в виде $F = R_q^h \mu$ для некоторых h, q и μ.

Задача 2 (обращение)**.** Найти необходимые и достаточные условия в терминах q и h, при которых операторы R_q^h и R_q обратимы, и указать формулы обращения.

В **параграфе 1.2** мы приводим основные результаты, касающиеся непрерывности и характеризации операторов R_q и R_q^h, а в **параграфах 1.3–1.5** мы доказываем эти результаты. Операторы типа преобразования Радона, как правило, удаётся успешно изучать методами гармонического анализа. В случае анализа в $\mathbb{R}_+^n$ вместо преобразования Фурье используются прямое и обратное преобразования Меллина, которые определяются формулами

$$(Mf)(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-I} f(x)\, dx, \quad z \in \mathbb{C}^n,\ I = (1, \dots, 1), \tag{8}$$

$$(M_c^{-1}\varphi)(x) = i^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{c+i\mathbb{R}^n} x^{-z} \varphi(z)\, dz, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,\ c \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где возведение вектора в векторную степень понимается в покомпонентном смысле. Оператор M естественно рассматривать на пространствах $L_c^p(\mathbb{R}_+^n)$, $c \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, аналогичных пространствам $L^p(\mathbb{R}^n)$ в случае анализа в $\mathbb{R}_+^n$. $L_c^p(\mathbb{R}_+^n)$ определяется как пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,c} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^{pc-I} dx\right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty),$$
$$\|f\|_{\infty,c} = \inf\{K \geq 0\colon |f(x)x^c| \leq K \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Для преобразования Меллина на пространствах $L^p_c(\mathbb{R}^n_+)$ справедливы аналоги многих теорем для преобразования Фурье на пространствах $L^p(\mathbb{R}^n)$, см. §1.4.

Основным результатом, касающимся непрерывности операторов R_q и R^h_q выступает следующая теорема. Она является аналогом проекционной теоремы для классического преобразования Радона, которая связывает преобразование Фурье функции с преобразованием Фурье её преобразования Радона.

Теорема 1. *Пусть q удовлетворяет (3) и (7). Пусть $f \in L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ при некоторых $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n_+$ и $p \in [1,\infty]$. Пусть $h \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^1_+)$, где $\alpha = c_1 + \dots + c_n$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|R_q f\|_{p,c} \leq \Gamma(\alpha)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|f\|_{p,I-c}, \tag{10}$$
$$\|R^h_q f\|_{p,c} \leq \Gamma(\alpha)^{-1}\|e^{-q}\|_{1,c}\|h\|_{1,\alpha}\|f\|_{p,I-c}, \tag{11}$$

где Γ — гамма-функция. Кроме того, если $p = 1$ или $p = 2$, то для п.в. $z \in c + i\mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$(MR_q f)(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)^{-1}(Mf)(I - z)\cdot(Me^{-q})(z), \tag{12}$$
$$(MR^h_q f)(z) = (2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(s)^{-1}(Mf)(I - z)\cdot(Me^{-q})(z)\cdot(Mh)(s), \tag{13}$$

где $s = z_1 + \dots + z_n$.

Отметим, что формула (13) остаётся справедливой и в случае, когда оператор R^h_q рассматривается на пространстве борелевских мер.

Затем мы переходим к рассмотрению задачи характеризации для интегральных операторов Радона R^h_q в случае функций q, удовлетворяющих условиям (3) и (7). Положим

$$\rho^h_q(z) = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{\Gamma(z_1 + \dots + z_n)\Gamma(z_1)\cdots\Gamma(z_n)}{(Me^{-q})(z)\cdot(Mh)(z_1 + \dots + z_n)}, \quad z = (z_1, \dots, z_n). \tag{14}$$

Определим оператор T^h_q формулой $T^h_q f = M_c^{-1}\rho^h_q M f$. Используя формулу (13), можно показать, что композиция оператора T^h_q с оператором R^h_q равняется преобразованию Лапласа. Комбинируя этот результат с теоремой характеризации для преобразования Лапласа (теоремой Бернштейна), мы получаем следующую теорему характеризации для оператора R_q^h. Напомним, что функция $g\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ называется вполне монотонной, если $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ и справедливы неравенства

$$(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}g(p)}{\partial p^\alpha} \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad p \in \mathbb{R}_+^n. \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть q удовлетворяет* (3) *и* (7) *и пусть $(Me^{-q})(z) \neq 0$ п.в. при $\operatorname{Re} z = c$, где $c \in \mathbb{R}_+^n$. Пусть $h \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+^1)$, где $\alpha = c_1 + \cdots + c_n$, и $(Mh)(s) \neq 0$ п.в. при $\operatorname{Re} s = \alpha$. Пусть $\rho_q^h \in L^2(c + i\mathbb{R}^n) \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n)$.*

При этих условиях функция $f\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ представима в виде $f = R_q^h\mu$, где μ — борелевская мера на $\mathbb{R}_+^n$ такая что $\mu \geq 0$, $\int x^{-c}\mu(dx) < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\|f\|_{2,c} < \infty, \quad \|T_q^h f\|_{1,c} < \infty, \quad T_q^h f \text{ вполне монотонна.} \tag{16}$$

В заключительной части §1.2 мы обращаемся к задаче характеризации оператора Π_q из формулы (5) в случае, когда $q = q_\alpha$, а q_α определено в формуле (6). Мы решаем задачу характеризации, указывая интегро-дифференциальный оператор F_α, композиция которого с оператором Π_{q_α} является преобразованием Лапласа, и комбинируем этот результат с теоремой характеризации для преобразования Лапласа. Важным преимуществом оператора F_α по сравнению с T_q^h является то, что в нём дифференцирование и интегрирование ведётся только по одной переменной. Этот результат приведён в теореме 1.4. Идея получения оператора F_α была приведена в работе [10] в случае $\alpha = 1$. Эта идея была обобщена на случай произвольных α в работе [42].

Во **второй главе** рассматриватся задача обращения для обобщённого преобразования Радона R_q и для интегральных операторов типа Радона R_q^h, включая случай оператора прибыли Π_q в обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена. Основные результаты главы 2 приведены в **параграфе 2.1**, а доказательство этих результатов проводится в **параграфах 2.2–2.5**.

Заметим, что формулы (12) и (13) могут использоваться для обращения операторов R_q и R_q^h. В случае оператора R_q^h, например, требуется выразить Mf через $MR_q^h f$ и воспользоваться формулой обращения для преобразования Меллина M. Однако этот подход требует вычисления несобственного интеграла и не может использоваться на практике. Если же несобственный интеграл заменить собственным интегралом, то мы получим приближённую формулу обращения. Соответствующая ошибка восстановления приводится в теореме 2.1.

Затем мы переходим к рассмотрению вопроса характеризации тех функций q и h, для которых операторы R_q и R_q^h являются обратимыми. Для получения критериев обратимости операторов R_q и R_q^h мы доказываем и используем аналоги тауберовых теорем Винера для случая, когда вместо преобразования Фурье используется преобразование Меллина. Тауберовы теоремы Винера позволяют связать полноту в $L^r(\mathbb{R}^n)$ линейной оболочки множества аддитивных сдвигов вида $f_a = f(\cdot - a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, некоторой функции f с величиной множества нулей её преобразования Фурье. Мы переносими эти результаты на случай гармонического анализа в $\mathbb{R}^n_+$. Соответствующие обобщения теорем Винера приводятся в леммах 2.3 и 2.4 из §2.3.

Для краткости будем говорить, что множество S является 1-тощим в плоскости $H \subset \mathbb{C}^n$, если $S \cap H$ нигде не плотно в H; 2-тощим в H, если $S \cap H$ имеет меру нуль в H; и ∞-тощим в H, если $S \cap H = \varnothing$. С помощью аналогов теорем Винера мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть q удовлетворяет (3) и (7). Пусть $c \in \mathbb{R}^n_+$ и $p \in \{1, 2, \infty\}$. Тогда Π_q инъективен в $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда R_q инъективен в $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$. При этом R_q инъективен в $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$ тогда и только тогда, когда множество нулей функции $(Me^{-q})(z)$ является p-тощим в плоскости $\operatorname{Re} z = c$.*

Аналогичная теорема справедлива для операторов R_q^h общего вида.

В приложении к обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена указанная теорема единственности характеризует отрасли, для которых агрегированная функция прибыли $\Pi_q f$ однозначно определяет распределение мощностей по технологиям f.

Мы также показываем, что инъективность "распространяется" по отношению к частичной композиции функций q. Комбинируя это свойство с теоремой 3, мы показываем, что оператор прибыли Π_q, отвечающий вложенной CES-функции q, является инъективным в любом пространстве $L^p_{I-c}(\mathbb{R}^n_+)$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, $c \in \mathbb{R}^n_+$.

В заключительной части §2.1 мы изучаем задачу обращения для оператора Π_q в случае, когда $q = q_\alpha$, $\alpha \in [-\infty, 1]$, где q_α определено в формуле (6). В теореме 2.4 мы показываем, что оператор прибыли Π_q является инъективным при $\alpha \neq 0$, а при $\alpha = 0$ мы описываем его ядро. Затем мы рассматриваем более сложную задачу нахождения функций $q = q_\alpha$ и f по функции прибыли $\Pi_q f$. Мы указываем достаточные условия, при которых из представимости функции F в двух разных формах $F = \Pi_{q_1}\mu_1$ и $F = \Pi_{q_2}\mu_2$, где $q_1 = q_{\alpha_1}$, $q_2 = q_{\alpha_2}$ и $q_1 \neq q_2$, следует, что $F = 0$. Эти условия приведены в теореме 2.5.

Основная идея получения этих условий заключается в том, что если $\Pi_{q_1}\mu_1 = \Pi_{q_2}\mu_2$, то оператор, переводящий функцию $\Pi_{q_1}\mu_1$ в преобразование Лапласа некоторой меры, также должен переводить функцию $\Pi_{q_2}\mu_2$ в преобразование Лапласа некоторой меры. Мы показываем, что это невозможно, если меры μ_1 и μ_2 достаточно быстро убывают на бесконечности. Если же отказаться от требования быстрого убывания мер, то можно привести пример двух разных мер μ_1 и μ_2, для которых $\Pi_{q_1}\mu_1 = \Pi_{q_2}\mu_2$ при $q_1 = q_{\alpha_1}$, $q_2 = q_{\alpha_2}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Такой пример приводится в предложении 2.2.

В **третьей главе** мы формулируем обратную задачу Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера и указываем некоторые приложения этой задачи в акустической томографии сред с течениями. В **параграфе 3.1** мы приводим основные определения и постановки задач. Мы рассматриваем следующее уравнение в частных производных:

$$L_{A,V}\psi \equiv -\Delta\psi - 2i\sum_{j=1}^{d} A_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + V(x)\psi = E\psi, \quad x \in D, \tag{17}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_d^2},$$

где $A = (A_1, \ldots, A_n)$, A_j и V — достаточно регулярные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ с границей ∂D, $E \in \mathbb{C}$, а $M_n(\mathbb{C})$ обозначает множество комплексных матриц размера $n \times n$.

Оператор Дирихле–Неймана $\Lambda_{A,V} = \Lambda_{A,V}(E)$ для уравнения (17) в области D сопоставляет функции f на ∂D функцию $\Lambda_{A,V}f$ на ∂D, которая определяется следующим образом:

$$\Lambda_{A,V}f = \left(\tfrac{\partial\psi}{\partial\nu} + i\sum\nolimits_{j=1}^{d} A_j\nu_j f\right)\big|_{\partial D}, \tag{18}$$

где ν — единичный внешний вектор нормали к ∂D, а ψ определяется как решение уравнения (17) с граничным условием $\psi|_{\partial D} = f$, при предположении, что соответствующая задача Дирихле имеет единственное решение (иными словами, E не является собственным значением Дирихле для оператора $L_{A,V}$ в области D).

Оператор $\Lambda_{A,V}$ инвариантен по отношению к следующим калибровочным преобразованиям:

$$\begin{cases} A_j \to A_j^g = gA_jg^{-1} + i\dfrac{\partial g}{\partial x_j}g^{-1}, \quad j = 1, \dots, d, & \text{(19a)} \\ V \to V^g = gVg^{-1} - g\Delta g^{-1} - 2i\displaystyle\sum_{j=1}^{d} gA_j\dfrac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}, & \text{(19b)} \end{cases}$$

где g – достаточно регулярная $GL_n(\mathbb{C})$-значная функция в замкнутой области $\overline{D}$, $g|_{\partial D} = \mathrm{Id}_n$, $GL_n(\mathbb{C})$ обозначает множество невырожденных матриц размера $n \times n$, а Id_n обозначает единичную матрицу.

Обратная задача Дирихле–Неймана для уравнения (17) формулируется следующим образом.

Задача 3. Пусть задан оператор $\Lambda_{A,V}(E)$ при фиксированном E (или при E из фиксированного множества). Найти A и V по модулю калибровочных преобразований (19a), (19b).

Рассмотрим теперь уравнение (17) при $x \in \mathbb{R}^d$, полагая A и V равными нулю вне области D. Мы сформулируем обратную задачу рассеяния для уравнения (17) в $\mathbb{R}^d$, к которой сводится задача 3. Для простоты обозначений предположим, что $E > 0$ и $n = 1$, так что A_j и V являются скалярными функциями. Мы рассматриваем классические решения рассеяния $\psi^+(x,k)$ уравнения (17), параметризованные вектором $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, и определяемые следующей асимптотикой при фиксированном k:

$$\begin{gathered} \psi^+(x,k) = e^{ikx} + C(d)|k|^{(d-3)/2}\frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}}f_{A,V}\big(k, |k|\tfrac{x}{|x|}\big) + O\big(|x|^{-(d+1)/2}\big), \\ |x| \to \infty, \quad C(d) = -\pi i(-2\pi i)^{(d-1)/2}, \end{gathered} \tag{20}$$

где функция $f = f_{A,V}$ заранее неизвестна. Эта функция определена на множестве

$$\mathcal{M}_E = \big\{(k,l) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid k^2 = l^2 = E\big\} \tag{21}$$

и называется амплитудой рассеяния для уравнения (17). Функция ψ^+ может быть найдена из интегрального уравнения типа Липпмана–Швингера

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int_D G^+(x-y,k)\big(L_{A,V} - L_{0,0}\big)\psi^+(y,k)\,dy, \tag{22}$$

$$G^+(x,k) = -(2\pi)^{-d}\int_D \frac{e^{i\xi x}\,d\xi}{\xi^2 - k^2 - i0}, \tag{23}$$

а амплитуда рассеяния f — из явной формулы

$$f(k,l) = (2\pi)^{-d}\int_D e^{-ily}\big(L_{A,V} - L_{0,0}\big)\psi^+(y,k)\,dy. \tag{24}$$

Амплитуда рассеяния инвариантна относительно преобразований

$$\begin{cases} A \to A^\varphi = A + \nabla\varphi, & \text{(25a)} \\ V \to V^\varphi = V - i\Delta\varphi + (\nabla\varphi)^2 + 2A\nabla\varphi, & \text{(25b)} \end{cases}$$

где φ — достаточно регулярная функция на $\mathbb{R}^d$ с достаточным убыванием на бесконечности. Обратная задача рассеяния для уравнения (17) в $\mathbb{R}^d$ формулируется следующим образом.

Задача 4. Пусть задана амплитуда рассеяния f на множестве $\mathcal{M}_E$ при фиксированном $E > 0$ (или при E из фиксированного множества). Найти A и V по модулю калибровочных преобразований (25a), (25b).

В §3.1 мы формулируем задачу 4 в более общем случае, когда $n \geq 1$ и $E \in \mathbb{C}$, но для этого требуется вводить дополнительные обозначения.

Задача 4 при $n = 1$ возникает, например, в квантовой электродинамике, где f является измеряемой величиной, описывающей рассеяние заряженных частиц в электромагнитном поле (практически, однако, измеряется лишь $|f|$), а коэффициенты A и V задают конфигурацию электромагнитного поля. Инвариантность функции f относительно преобразований (25a), (25b) является отражением принципа относительности Вейля (см. [27]), согласно которому конфигурации электромагнитного поля, соответствующие коэффициентам A, V и коэффициентам A^φ, V^φ, физически неотличимы. Поэтому достаточно восстанавливать одну из пар коэффициентов, связанную с исходными коэффициентами A, V соотношениями (25a), (25b). Часто на практике фиксируют пару коэффициентов A^{div}, V^{div}, удовлетворяющих условию $\nabla \cdot A^{\mathrm{div}} = 0$ (в терминах электродинамики это называется представлением электромагнитного поля в кулоновской калибровке).

В **параграфе 3.2** мы формулируем основные результаты, касающиеся единственности решения задачи 3 в рамках одной модели акустической томографии сред с течениями. В **параграфах 3.3 и 3.4** мы доказываем эти результаты. В рассматриваемой модели акустической томографии гармоническое по времени ($e^{-i\omega t}$) акустическое давление ψ в движущейся жидкости со скоростью звука $c = c(x)$, скоростью течения $v = v(x)$, плотностью $\rho = \rho(x)$ и коэффициентом поглощения звука $\alpha = \alpha(x, \omega)$ при фиксированной частоте $\omega \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$L_\omega \psi \equiv -\Delta\psi - 2iA_\omega(x) \cdot \nabla\psi - U_\omega(x)\psi = 0, \quad x \in D, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} A_\omega(x) = \frac{\omega v(x)}{c^2(x)} + \frac{i}{2}\frac{\nabla\rho(x)}{\rho(x)}, \quad U_\omega(x) = \frac{\omega^2}{c^2(x)} + 2i\omega\frac{\alpha(x,\omega)}{c(x)}, \\ \alpha(x,\omega) = \omega^{\zeta(x)}\alpha_0(x), \end{gathered} \tag{27}$$

где D — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, занимаемая жидкостью. Заметим, что $L_\omega = L_{A_\omega,-U_\omega}$, где оператор $L_{A_\omega,-U_\omega}$ определяется в формуле (17). Из физических соображений вытекают следующие требования:

$$\begin{gathered} c \geq c_{min} > 0,\ \rho \geq \rho_{min} > 0,\ \alpha_0 \geq 0,\ v = \overline{v},\ \zeta = \overline{\zeta} \text{ в } \overline{D} \\ \text{для некоторых констант } c_{min} \text{ и } \rho_{min}. \end{gathered} \tag{28}$$

Обозначим через $\Lambda_\omega = \Lambda_{A_\omega,-U_\omega}$ оператор Дирихле–Неймана для уравнения (26) в D (см. формулу (18)). Нас интересует следующая задача.

Задача 5. Пусть задан оператор Λ_ω при одной или нескольких частотах ω. Найти параметры жидкости c, v, ρ и α.

Мы доказываем следующий общий результат об идентифицируемости параметров жидкости по граничным измерениям при трёх частотах в случае, когда поглощение зависит от частоты (т.е. $\zeta \neq 0$ в D).

Теорема 4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ — ограниченная односвязная область с линейно связной границей ∂D, где $\partial D \in C^\infty$ $(d = 2)$ или $\partial D \in C^1$ $(d \geq 3)$. Пусть операторы $L_\omega^{(j)}$ и $\Lambda_\omega^{(j)}$ соответствуют коэффициентам $c^{(j)}$, $\rho^{(j)}$, $v^{(j)}$, $\alpha_0^{(j)}$ и $\zeta^{(j)}$, удовлетворяющим (28) и*

$$\begin{gathered} c \in W^{1,\infty}(D,\mathbb{R}), \ \ \rho \in C(\bar{D}) \cup C^2(D), \ \ v \in W^{1,\infty}(D,\mathbb{R}^d), \\ \alpha_0 \in C(\bar{D}), \ \ \zeta \in C(\bar{D}), \ \ \zeta \neq 0, \ \ \text{где } d \geq 3, \end{gathered} \tag{29}$$

либо

$$\begin{gathered} c \in W^{2,p}(D,\mathbb{R}), \quad \rho \in W^{3,p}(D,\mathbb{R}), \quad v \in W^{2,p}(D,\mathbb{R}^d), \\ \alpha_0 \in W^{1,p}(D,\mathbb{R}), \quad \zeta \in C(\bar{D}), \quad \zeta \neq 0, \quad \text{где } p > 2,\ d = 2. \end{gathered} \tag{30}$$

Предположим, что ω_1, ω_2, $\omega_3 \in (0,+\infty)$ — три попарно различных частоты, при которых 0 не является собственным значением Дирихле для операторов $L_\omega^{(1)}$ и $L_\omega^{(2)}$ в D. Тогда из равенства операторов $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$ при $\omega \in \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ следует, что $c^{(1)} = c^{(2)}$, $\rho^{(1)} = C\rho^{(2)}$, $v^{(1)} = v^{(2)}$ и $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$, где $C = \mathrm{const} > 0$ и $\alpha^{(j)}(x,\omega) = \omega^{\zeta^{(j)}(x)}\alpha_0^{(j)}(x)$.

Для получения этой теоремы мы пользуемся результатами из статей [3], [9], [13] для восстановления коэффициентов A_ω и U_ω по оператору Λ_ω при фиксированном ω с точностью до подходящего калибровочного преобразования. Затем мы показываем, что используя граничные измерения при трёх частотах, можно избавиться от калибровочной неединственности и восстановить параметры c, v, α и ρ. При этом ρ восстанавливается с точностью до положительного постоянного множителя, который не играет роли в описании поведения жидкости (см. формулу (27)).

В теореме 3.5 мы показываем, что зависимость поглощения α от частоты ω является необходимым условием идентифицируемости параметров жидкости. Мы приводим два разных набора параметров жидкости $c^{(1)}$, $v^{(1)}$, $\rho^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$ и $c^{(2)}$, $v^{(2)}$, $\rho^{(2)}$, $\alpha^{(2)}$, где $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ не зависят от ω, таких, что соответствующие операторы Дирихле–Неймана совпадают (т.е. $\Lambda_\omega^{(1)} = \Lambda_\omega^{(2)}$) при всех ω, при которых 0 не является собственным значением Дирихле для $L_\omega^{(1)}$ и $L_\omega^{(2)}$.

Мы также рассматриваем два частных случая задачи 5. Первый случай соответствует непоглощающим жидкостям постоянной плотности (т.е. $\rho \equiv \mathrm{const}$, $\alpha \equiv 0$). Мы показываем, что в этом случае граничные измерения при одной частоте однозначно определяют остальные параметры жидкости, см. предложение 3.1. Второй случай соответствует непоглощающим жидкостям (т.е. $\alpha = 0$) с не обязательно постоянной плотностью. В этом случае показывается, что двух частот достаточно для идентификации остальных параметров, см. теорему 3.3.

В **четвёртой главе** мы приводим формулы и уравнения, которые позволяют свести обратную задачу Дирихле–Неймана 3 к обратной задаче рассеяния 4. Чтобы не вводить дополнительные обозначения, изложим содержание этой главы в случае, когда $E > 0$.

Обозначим через $\Lambda_{A,V}(E)$ оператор Дирихле–Неймана для уравнения (17) с коэффициентами $A = (A_1, \dots, A_d)$ и V в области D. Мы также рассматриваем уравнение (17) во всём пространстве $\mathbb{R}^d$, продолжая коэффициенты A и V нулём вне области D. Для этого уравнения мы рассматриваем классические решения рассеяния ψ^+ и соответствующую амплитуду рассеяния $f = f_{A,V}$. Напомним, что функции ψ^+ и $f_{A,V}$ в случае скалярных коэффициентов A_1, …, A_d, V определяются из формулы (20); в случае же матричных коэффициентов можно записать аналог формулы (20), который мы опускаем в виду его громоздкости.

В **параграфе 4.1** мы приводим уравнения для нахождения классических и обобщённых решений рассеяния на границе области D по оператору Дирихле–Неймана. Мы также указываем явные формулы, позволяющие найти классические и обобщённые амплитуды рассеяния по этим решениям. Пусть $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ обозначает пространство непрерывно дифференцируемых $M_n(\mathbb{C})$-значных функций на ∂D, чьи первые производные β-Гёльдер-непрерывны, с нормой

$$\|\psi\|_{C^{1,\beta}} = \|\psi\|_{C^1} + \max_{i,j} \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \partial D \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\left|\operatorname{Grad} \varphi_{ij}(x_1) - \operatorname{Grad} \varphi_{ij}(x_2)\right|}{|x_1 - x_2|^\beta}, \qquad (31)$$

где $\varphi(x) = \big(\varphi_{ij}(x)\big) \in M_n(\mathbb{C})$, а Grad обозначает поверхностный градиент, см. [5, с. 33-39]. Обозначим через $\Lambda_{A,V}(x, y, E)$ ядро (в смысле теории распределений) оператора $\Lambda_{A,V}(E)$. Наконец, пусть $\mathcal{E}^+$ обозначает множество тех $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, при которых уравнение (22) однозначно разрешимо относительно $\psi^+ \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_n(\mathbb{C}))$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть D — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$, 3) с границей $\partial D \in C^2$. Пусть A_1, …, A_d, V — Гёльдер-непрерывные $M_n(\mathbb{C})$-значные функции с компактным носителем в D. Предположим, что $E > 0$ и E не является собственным значением Дирихле для операторов $L_{A,V}$ и $-\Delta$ в D, где $A = (A_1, \dots, A_d)$. Тогда справедлива формула*

$$f(k, l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} e^{-ilx} (\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0})(x, y, E) \psi^+(y, k)\, dy\, dx, \qquad (32)$$

где $k,\ l \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+)$, $k^2 = l^2 = E$, и уравнение

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\partial D} A^+(x,y,k)\psi^+(y,k)\,dy, \quad x \in \partial D, \tag{33}$$

$$A^+(x,y,k) = \int\limits_{\partial D} G^+(x-z,k)(\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0})(z,y,E)\,dz, \quad x,y \in \partial D,$$

где $k \in \mathbb{R}^d \setminus (0 \cup \mathcal{E}^+)$, $k^2 = E$. Кроме того, уравнение (33) *при фиксированном k является однозначно разрешимым уравнением Фредгольма второго рода относительно $\psi \in C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$ при любом фиксированном $\beta \in (0,1)$.*

Аналогичные формулы и уравнения справедливы для нахождения обобщённых решений рассеяния и амплитуд рассеяния.

Заметим, что на практике уравнения вроде (33) особенно эффективно решаются методом последовательных приближений. Для применения этого метода требуется, чтобы функция $A^+(x,y,k)$ была достаточно мала. В частности, это справедливо, если коэффициенты A и V малы. Однако на практике часто возникает случай, когда коэффициент A мал, а коэффициент V близок к некоторому известному «фоновому» коэффициенту V^0. В **параграфе 4.2** мы приводим формулу (32) и уравнение (33) в этом более общем случае, что делает их более применимыми на практике. Вывод этих формул и уравнений проводится в **параграфах 4.3 и 4.4**.

Формула (32) получается из явной формулы (24) с использованием второй формулы Грина. Аналогично, уравнение (33) выводится из интегрального уравнения (22) и второй формулы Грина. Таким же способом доказываются аналоги формул (32) и (33) в случае, когда $E \in \mathbb{C}$ и присутствует ненулевой «фоновый» потенциал V^0.

Для доказательства того, что уравнение (33) является уравнением Фредгольма второго рода, мы переписываем его операторной форме

$$\psi^+ = e^{ikx} + G^+(\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0})\psi^+, \tag{34}$$

$$\Lambda_{A,V} - \Lambda_{0,0} = N_{A,V}S_{A,V}. \tag{35}$$

Здесь оператор G^+ обладает ядром $G^+(x-y,k)$, $S_{A,V}$ — оператор, отображающий функцию f на ∂D в решение ψ уравнения (17) в области D с граничным условием $\psi|_{\partial D} = f$, оператор $N_{A,V}$ определяется формулой

$$(N_{A,V}\psi)(x) = \int\limits_D \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x, y, E)\big(L_{A,V} - L_{0,0}\big)\psi(y)\, dy, \quad x \in \partial D,$$

где Γ — функция Грина задачи Дирихле для оператора $\Delta + E$ в области D, а ν_x — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке x.

Следующие отображения являются линейными и непрерывными:

$$C^{1,\beta}(\partial D) \xrightarrow{S_{A,V}} C^1(\overline{D}) \xrightarrow{N_{A,V}} C^2(\partial D) \xhookrightarrow{i} C^{1,\beta}(\partial D) \xrightarrow{G^+} C^{1,\beta}(\partial D), \tag{36}$$

где i обозначает вложение, а пространства функций подразумеваются $M_n(\mathbb{C})$-значными. Учитывая компактность оператора i и пользуясь представлениями (34) и (35), мы получаем, что уравнение (33) является уравнением Фредгольма второго рода в $C^{1,\beta}(\partial D, M_n(\mathbb{C}))$.

В **пятой главе** мы приводим два алгоритма приближённого решения обратной задачи рассеяния 4 для уравнения (17) в $\mathbb{R}^2$ со скалярными коэффициентами A_1, A_2, V и при фиксированной энергии $E > 0$. Первый алгоритм основан на решении нелокальной задачи Римана–Гильберта. Численные результаты, сообщённые в докладе [21], показывают, что этот метод успешно работает в случае произвольных ограниченных коэффициентов A, V с компактным носителем. Второй алгоритм получается линеаризацией первого в случае малых коэффициентов A, V. Сходимость линеаризованного метода при $E \to \infty$ полностью доказана, в то время как теоретическое обоснование сходимости нелинеаризованного алгоритма составит содержание одной из будущих статей.

Первый алгоритм приводится в **параграфе 5.1** и выводится в **параграфе 5.3**. Для его формулировки нам потребуется ввести несколько обозначений. Через A^{div}, V^{div} обозначим пару коэффициентов, связанных с коэффициентами A, V калибровочным преобразованием (25a), (25b) и удовлетворяющих условию $\nabla \cdot A^{\mathrm{div}} = 0$ (такая пара коэффициентов определяется единственным образом). Первый алгоритм позволяет приближенно восстановить A^{div}, V^{div} по амплитуде рассеяния f.

Пусть $E > 0$ зафиксировано. Тогда амплитуда рассеяния f может рассматриваться как функция на торе $T^2 = T \times T$, где $T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Определим следующие операторы, следуя [24]:

$$(P_{\pm}(\lambda)u)(\lambda') = -\pi i \int_T u(\lambda'')\chi\Big[\pm i\Big(\frac{\lambda}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda}\Big)\Big] f(\lambda'',\lambda')|d\lambda''|, \tag{37}$$

$$(Q_{\pm}(z)u)(\lambda) = \pi i \int_T h_{\pm}(\lambda,\lambda')e(\lambda,\lambda',z)\chi\Big[\pm i\Big(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\Big)\Big] u(\lambda')|d\lambda'|, \tag{38}$$

$$e(\lambda,\lambda',z) = \exp\big(-i\tfrac{\sqrt{E}}{2}\big((\lambda-\lambda')\bar z + (\lambda^{-1} - \lambda'^{-1})z\big), \tag{39}$$

$$(C_{\pm}u)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{u(\xi)}{\xi - \lambda(1\mp 0)}d\xi, \tag{40}$$

$$B(z) = C_+Q_-(z) - C_-Q_+(z), \tag{41}$$

где χ — функция Хевисайда, $|d\lambda| = d\lambda/(i\lambda)$. Функции $h_{\pm}$ из формулы (38) определяются ниже. Обозначим $\partial_{x_k} = \partial/\partial x_k$, $z = x_1 + ix_2$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$, $\mathrm{curl} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$.

Алгоритм 1. *Пусть f — амплитуда рассеяния для оператора $L_{A,V}$ при фиксированной энергии $E > 0$. Определим A^{div}_{appr}, V^{div}_{appr} по следующей схеме:*

$$f \longrightarrow h_{\pm} \longrightarrow \mu^+ \longrightarrow \mu_{\pm} \longrightarrow A^{div}_{appr}, V^{div}_{appr}. \tag{42}$$

Функции $h_{\pm}$, μ^+ и $\mu_{\pm}$ последовательно находятся из следующих уравнений (43), (44) *и явной формулы* (45)*:*

$$h_{\pm}(\lambda,\lambda') + (P_{\pm}(\lambda)h_{\pm}(\lambda,\cdot))(\lambda') = f(\lambda,\lambda'), \quad (\lambda,\lambda')\in T^2, \tag{43}$$

$$\mu^+(z,\lambda) + (B(z)\mu^+(z,\cdot))(\lambda) = 1, \quad z\in\mathbb{C},\ \lambda\in T, \tag{44}$$

$$\mu_{\pm}(z,\lambda) = \mu^+(z,\lambda) + (Q_{\pm}(z)\mu^+(z,\cdot))(\lambda), \quad z\in\mathbb{C},\ \lambda\in T. \tag{45}$$

Затем коэффициенты A^{div}_{appr} и V^{div}_{appr} определяются с помощью формул

$$A^{div}_{appr}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{curl}\Big(\ln\int_T \mu_+(z,\zeta)|d\zeta|\Big), \tag{46}$$

$$\begin{aligned} V^{div}_{appr}(x) = 2|A^{div}_{appr}(x)|^2 + \frac{\sqrt{E}}{2\pi}\int_T \partial_z\mu_-(z,\zeta)d\zeta \\ +\sqrt{E}\partial_{\bar z}\Big(\int_T \mu_+(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} \Big/ \int_T \mu_+(z,\zeta)|d\zeta|\Big). \end{aligned} \tag{47}$$

Теорема 6. *Пусть $E > 0$ и $z\in\mathbb{C}$ зафиксированы. Пусть $f\in C^\infty(T^2)$ и $\|f\|_{L^2(T^2)} < \frac{1}{6\pi}$. Тогда уравнение* (43) *однозначно разрешимо относительно*

$h_\pm \in L^2(T^2)$, а уравнение (44) однозначно разрешимо относительно $\mu^+(z,\cdot) \in L^2(T)$. Кроме того, знаменатель дроби в формуле (47) отличен от нуля при всех $z \in \mathbb{C}$, функции A^{div}_{appr} и V^{div}_{appr} ограничены, убывают на бесконечности и удовлетворяют $\nabla \cdot A^{div}_{appr} = 0$. Наконец, оператору $L_{A^{div}_{appr}, V^{div}_{appr}}$ соответствует амплитуда рассеяния f при энергии E.

Заметим, что требования на гладкость и малость функции f в теореме 6 являются завышенными. Также заметим, что вычисление функций $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ и $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ в различных точках производится независимо, что делает алгоритм 1 хорошо параллелизуемым. Кроме того, результаты, сообщённые в докладе [21], свидетельствуют о том, что при стремлении E к бесконечности коэффициенты $A^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$, $V^{\mathrm{div}}_{\mathrm{appr}}$ поточечно сходятся к A^{div}, V^{div}. Теоретическое обоснование сходимости будет проведено в одной из будущих статей.

Укажем основные идеи, лежащие в основе алгоритма 1. Мы рассматриваем обобщённые решения рассеяния $\psi(x,k)$, $k \in \mathcal{K}_E$, $\mathcal{K}_E = \{k \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2 \mid k^2 = E\}$, уравнения (17) в $\mathbb{R}^2$, восходящие к Л. Фаддееву. Функции $\psi(x,k)$ обладают следующей асимптотикой по $k = (k_1,k_2)$ при фиксированном x:

$$\psi\big(x,k(\lambda)\big) = e^{ik(\lambda)x}\big(\tilde\mu_0^\pm + \tilde\mu_1^\pm\lambda^{\pm1} + o(|\lambda|^{\pm1})\big), \quad |\lambda|^\pm \to 0, \tag{48}$$

$$k_1(\lambda) = \tfrac{1}{2}E^{1/2}(\lambda + \lambda^{-1}), \quad k_2(\lambda) = \tfrac{i}{2}E^{1/2}(\lambda^{-1} - \lambda), \tag{49}$$

где $\tilde\mu_j^\pm = \tilde\mu_j^\pm(x)$ — некоторые функции. Заметим, что отображение (49) является биекцией $\mathbb{C} \setminus T$ на $\mathcal{K}_E$. Подставляя выражение (48) в уравнение (17), приравнивая коэффициенты при равных степенях λ и пользуясь соотношением $\nabla \cdot A^{\mathrm{div}} = 0$, мы получаем выражения для коэффициентов A^{div} и V^{div} в терминах функций $\tilde\mu_0^\pm$ и $\tilde\mu_1^\pm$.

Теперь необходимо найти функции $\tilde\mu_0^\pm$ и $\tilde\mu_1^\pm$. Можно показать, что функция $\tilde\mu(x,k) = e^{-ikx}\psi(x,k)$ равномерно ограничена по переменным x и k, а также удовлетворяет $\bar\partial$-уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\tilde\mu\big(x,k(\lambda)\big) = r(x,\lambda)\tilde\mu\big(x,k(-1/\bar\lambda)\big), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus T, \tag{50}$$

где функция r при больших E мала равномерно по x и λ. Скачки функций $\tilde\mu_\pm(x,k(\lambda)) = \tilde\mu(x,k(\lambda \pm 0\lambda))$ на окружности T связаны соотношением

$$\tilde\mu_+(x,k(\lambda)) = \tilde\mu_-(x,k(\lambda)) + \int_T \widetilde\rho(x,\lambda,\lambda')\tilde\mu_-(x,k(\lambda'))\,|d\lambda'|, \quad \lambda \in T, \tag{51}$$

где функция $\widetilde{\rho}$ выражается через амплитуду рассеяния f. Мы находим приближённые значения $\mu_\pm$ функций $\tilde{\mu}_\pm$, считая, что они удовлетворяют уравнению (50) с $r \equiv 0$ и связаны соотношением (51). Задача нахождения таких функций $\mu_\pm$ известна как нелокальная задача Римана–Гильберта.

Зная $\mu_\pm$, мы можем найти приближенные значения $\mu_0^\pm$ и $\mu_1^\pm$ функций $\tilde{\mu}_0^\pm$ и $\tilde{\mu}_1^\pm$ из формулы (48), используя формулу Коши–Грина.

В **параграфе 5.2** мы приводим формулы второго алгоритма, который может использоваться в случае малости коэффициентов A и V. Этот алгоритм можно получить двумя разными способами. Первый способ заключается в рассмотрении линеаризованной обратной задачи рассеяния при малых коэффициентах A, V, когда вместо амплитуды рассеяния f рассматривается линеаризованная амплитуда рассеяния

$$f^{\mathrm{lin}}(k,l) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(k-l)x} \big(2k \cdot A(x) + V(x)\big)\, dx, \quad k, l \in \mathbb{R}^2,\ k^2 = l^2 = E.$$

Коэффициенты A и V находятся с помощью обращения преобразования Фурье. Вывод второго алгоритма этим способом приводится в **параграфе 5.4**.

Второй способ заключается в линеаризации первого алгоритма при малых коэффициентах. Мы считаем, что имеется малый параметр ε и справедлива оценка $|f(k,l)| \le C\varepsilon$, k, $l \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2 = E$, $C = \mathrm{const} > 0$, для амплитуды рассеяния (в частности, амплитуда рассеяния удовлетворяет такой оценке, если коэффициенты A и V имеют порядок малости ε). Затем мы отбрасываем во всех формулах и уравнениях первого алгоритма слагаемые, порядок которых выше, чем ε. Этим способом второй алгоритм выводится в **параграфе 5.5**.

В **заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертации (см. раздел «основные результаты» автореферата), а также основные перспективы разработки темы диссертации, мотивированные приложениями:

1. Применить обобщённую модель Хаутеккера—-Иохансена к исследованию производства в реальных отраслях, функционирующих в условиях глобализации. Исследовать объяснительный потенциал модели, её слабые и сильные стороны.

2. Исследовать потенциал формализма распределения мощностей по технологиям для решения задачи составления межотраслевого баланса в условиях замещения факторов.

3. Адаптировать алгоритм акустической томографии для случая неполных данных. Исследовать возможность компенсировать малое число детекторов большим числом рабочих частот.

4. Обобщить алгоритм решения обратной задачи рассеяния на случай, когда известна лишь абсолютная величина амплитуды рассеяния (отсутствует информация о фазе). Соискатель начал работу над этой темой во время стажировки в университет г. Гёттинген осенью 2015 года. По результатам стажировки подготовлен препринт.

5. Обобщить алгоритм решения обратной задачи Дирихле–Неймана для калибровочно-ковариантного оператора Шрёдингера на случай областей нетривиальной геометрии. В этом направлении автором опубликована работа [34], связанная с восстановлением римановой поверхности по её оператору Дирихле–Неймана.

Благодарность

Автор благодарен своему научному руководителю А. А. Шананину и своему научному руководителю на период стажировок в Ecole Polytechnique Р. Г. Новикову за постоянное внимание к работе, ценные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Beylkin G. The inversion problem and applications of the generalized Radon transform // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1984. — Vol. 37. — P. 579–599.

[2] Bochner S. Harmonic analysis and the theory of probability. — Berkeley and Los Angeles : University of California press, 1955.

[3] Brown R. M., Salo M. Identifiability at the boundary for first-order terms // Appl. Anal. — 2006. — Vol. 85, no. 6-7. — P. 735–749.

[4] Calderòn A. P. On an inverse boundary value problem // Seminar on numerical analysis and its applications to continuum physics / Ed. by W. H Meyer, M. A. Raupp. — Rio de Janeiro : Sociedade Brasiliera de Matematica, 1980. — P. 65–73.

[5] Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. — New York : John Wiley, 1983.

[6] Eskin G., Ralston J. Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with magnetic potential at a fixed energy // Commun. Math. Phys. — 1995. — Vol. 173. — P. 173–199.

[7] Eskin G., Ralston J. Inverse scattering problems for Schrödinger operators with magnetic and electric potentials // Inverse problems in wave propagation. — New York : Springer, 1997. — Vol. 90 of IMA Vol. Math. Appl. — P. 147–166.

[8] Eskin G., Ralston J. Inverse scattering problems for the Schrödinger operators with external Yang-Mills potentials // Partial differential equations and their applications (Toronto 1995). — Providence : AMS, 1997. — Vol. 12 of CRM. Proc. Lecture Notes. — P. 91–106.

[9] Guillarmou C., Tzou L. Identification of a connection from Cauchy data on a Riemann surface with boundary // Geom. Funct. Anal. — 2011. — Vol. 21, no. 2. — P. 393–418.

[10] Henkin G. M., Shananin A. A. Bernstein theorems and radon transform. application to the theory of production functions // Trans. Math. Mon. — 1990. — Vol. 81. — P. 189–223.

[11] Houthakker H. S. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis // Review of Economic Studies. — 1955-1956. — Vol. 23, no. 1. — P. 27–31.

[12] Johansen L. Production functions. — Amsterdam-London : North Holland Co., 1972.

[13] Krupchyk K., Uhlmann G. Uniqueness in an inverse boundary problem for a magnetic Schrödinger operator with a bounded magnetic potential // Comm. Math. Phys. — 2014. — Vol. 327, no. 3. — P. 993–1009.

[14] Novikov R. G. The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // J. Funct. Anal. — 1992. — Vol. 103, no. 2. — P. 409–469.

[15] Novikov R. G. Formulae and equations for finding scattering data from the Dirichlet-to-Neumann map with nonzero background potential // Inv. Problems. — 2005. — Vol. 21, no. 1. — P. 257–270.

[16] Novikov R. G., Santacesaria M. Mohochromatic recontruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems // Int. Math. Res. Not. IMRN. — 2013. — no. 6. — P. 1205–1229.

[17] Roussef D., Winters K. B. Two-dimensional vector flow inversion by diffraction tomography // Inv. Problems. — 1994. — Vol. 10. — P. 687–697.

[18] Rychagov M. N., Ermert H. Reconstruction of fluid motion in acoustic diffraction tomography // J. Acoust. Soc. Am. — 1996. — Vol. 99, no. 5. — P. 3029–3035.

[19] Sato K. Production Functions and Aggregation. — Amsterdam : North-Holland, 1975.

[20] Schrader R., Taylor M. Semiclassical asymptotics, gauge fields and quantum chaos // J. Funct. Anal. — 1989. — Vol. 83, no. 2. — P. 258–316.

[21] Shurup A. S., Rumyantseva O. D. Numerical simulation of the functional approach for recovering vector fields in acoustic tomography // Quasilinear equations, inverse problems and their applications. — Dolgoprudny, Russia : Phystech-polygraph, 2015. — Conference handbook and proceedings. — P. 11.

[22] Моделирование функционального решения задачи акустической томографии по данным от квазиточечных преобразователей / В. А. Буров, А. С. Шуруп, Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева // Акустический журнал. — 2013. — Т. 59, № 3. — С. 391–407.

[23] Новиков Р. Г. Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ // Функц. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 4. — С. 11–22.

[24] Новиков Р. Г. Приближенное решение обратной задачи квантовой теории рассеяния при фиксированной энергии в размерности 2 // Солитоны, геометрия, топология — на перекрестках, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. — М. : Наука, 1999. — Т. 225 из Тр. МИАН. — С. 301–318.

[25] Петров А. А., Поспелов И. Г. Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций. 1. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1979. — № 2. — С. 18–27.

[26] Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. — М. : Энергоатомиздат, 1996.

[27] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — 2 изд. — М. : Наука, 1988.

[28] Шананин А. А. Исследование обобщённой модели чистой отрасли // Матем. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 10. — С. 73–82.

[29] Шананин А. А. Обобщённая модель чистой отрасли производства // Матем. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 9. — С. 117–127.

Публикации автора по теме диссертации

[30] Agaltsov A. D. On the injectivity of the generalized Radon transform arising in a model of mathematical economics. — http://arxiv.org/abs/1508.02014.

[31] Agaltsov A. D. On the reconstruction of parameters of a moving fluid from the Dirichlet-to-Neumann map // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. — Vol. 4, no. 1. — P. 4–11.

[32] Agaltsov A. D. Finding scattering data for a time-harmonic wave equation with first order perturbation from the Dirichlet-to-Neumann map // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2015. — Vol. 23, no. 6. — P. 627–645.

[33] Agaltsov A. D. A global uniqueness result for acoustic tomography of moving fluid // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2015. — Vol. 139, no. 8. — P. 937–942.

[34] Agaltsov A. D., Henkin G. M. Explicit reconstruction of Riemann surface with given boundary in complex projective space // The Journal of Geometric Analysis. — 2015. — Vol. 25, no. 4. — P. 2450–2473.

[35] Agaltsov A. D., Novikov R. G. Error estimates for phaseless inverse scattering in the Born approximation at high energies. — http://arxiv.org/abs/1604.06555.

[36] Agaltsov A. D., Novikov R. G. Riemann-Hilbert problem approach for two-dimensional flow inverse scattering // J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 55, no. 10. — id 103502.

[37] Agaltsov A. D., Novikov R. G. Uniqueness and non-uniqueness in acoustic tomography of moving fluid // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2016. — Vol. 24, no. 3. — P. 333–340.

[38] Агальцов А. Д. Исследование обобщенного преобразования Радона и его экономические приложения // Управление и прикладная математика. Т. 1. — Долгопрудный : Физтех-полиграф, 2012. — Труды 55-ой научной конференции МФТИ. — С. 34–36.

[39] Агальцов А. Д. Исследование обобщенного преобразования Радона и его экономические приложения // Сборник тезисов лучших курсовых работ 2012 года. — Москва : ВМК МГУ, 2012. — С. 17–18.

[40] Агальцов А. Д. Исследование обобщённого преобразования Радона и его

экономические приложения // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2013 года. — Москва : ВМК МГУ, 2013. — С. 44–46.

[41] Агальцов А. Д. Теоремы характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона // Труды МФТИ. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 48–61.

[42] Агальцов А. Д. Теоремы характеризации, обращения и единственности для преобразования Радона по гиперповерхностям уровня положительно однородных функций // Управление и прикладная математика. Т. 1. — Долгопрудный : Физтех-полиграф, 2013. — Труды 56-ой научной конференции МФТИ. — С. 35–36.

[43] Агальцов А. Д. Теоремы обращения и единственности для интегральных операторов типа Радона // Труды МФТИ. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 3–14.

[44] Агальцов А. Д. Теорема характеризации для обобщённого преобразования Радона, возникающего в одной модели математической экономики // Функц. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, № 3. — С. 57–60.