Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2017)

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9(\sin x)^2 + (\cos x)^2} \ .$$

2. Среди всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от заданных точек $B(5,1,1)$ и $C(0,2,3)$, найти координаты такой точки A, которая наименее удалена от начала координат.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(0.5\pi + 3\pi n)}{(2n+3)\sqrt[3]{(\ln(3n+2))^2}} \ .$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) + 2y'(x) = -\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{3+\mathrm{e}^{2x}} \ .$$

5. Вычислить интеграл в комплексной плоскости

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{\mathrm{e}^{z^{-2}}}{z^2+4}\, dz \ .$$

6. В базисе $B = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ из функциональных элементов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности не более 7 с входами x_1, x_2, y_1, y_2 и выходом z, на котором появляется 1 в том и только в том случае, когда число $x = 2\cdot x_1 + x_2$ не больше числа $y = 2\cdot y_1 + y_2$. (Здесь $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0;1\}$, $+$ и $\cdot$ обозначают соответственно операции сложения и умножения целых чисел.)

7. Написать программу, принимающую на стандартный ввод текст с записями о проходах через пропускной пункт. Проходы случаются не чаще, чем 1 раз в секунду. О каждом проходе в тексте есть либо запись вида: $hms1$ (если это проход в прямом направлении — вход); либо запись вида: $hms-1$ (если это проход в обратном направлении — выход). Все части записи разделены одинарными пробелами, $0 \le h \le 23$, $0 \le m, s \le 59$; $h, m, s \in \mathrm{Z}$. Записи находятся на отдельных строках. В тексте содержатся неупорядоченные неповторяющиеся записи за одни сутки. В первой строке текста дано количество записей n, $0 < n < 86401$. Программа, разделив сутки на часы (1-й, 2-й, …, 24-й), должна найти тот час, в течение которого произошло наибольшее количество входов. Если таких часов несколько, то искомым является более ранний. Программа должна вывести в формате hms время самого позднего входа, осуществленного в найденный час. Если во вводе нет записей о входах, то программа должна вывести -1.

Указание: Программа должна быть эффективной по вычислениям. Объём используемой памяти должен быть мал и не должен зависеть от ввода. Неэффективное по вычислениям и/или по памяти решение рассматривается как ошибочное. Допустимые языки: Free Pascal, Delphi, C, C++.

Пример ввода:

```
6
1 2 10 -1
2 0 0 1
1 3 0 1
1 5 15 1
1 0 2 1
1 2 0 -1
```

Вывод программы: 1 5 15

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

1. **Решение:** Выполняя замену переменных $t = \operatorname{tg} x$, имеем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9(\sin x)^2 + (\cos x)^2} = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3t)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{18}\,.$$

2. **Решение:** Точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от заданных точек B и C, расположены в плоскости α, перпендикулярной отрезку BC и проходящей через его середину D. Значит, вектор $\overline{BC}$ является нормалью этой плоскости. Находим: $\overline{BC} = (-5, 1, 2)$, $D = (2.5, 1.5, 2)$. Тогда, уравнение плоскости α имеет вид: $5x - y - 2z - 7 = 0$.

Искомая точка A является точкой пересечения плоскости α и прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно этой плоскости. Значит, вектор $\overline{BC}$ служит направляющим вектором этой прямой, а потому ее каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x}{-5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Найдем координаты точки A. Для этого, перепишем каноническое уравнение прямой в параметрическом виде: $x = -5t$, $y = t$, $z = 2t$, $t \in \mathrm{R}$. Затем, подставляя полученные выражения в уравнение плоскости α, найдем значение параметра $t_* = -\frac{7}{30}$, отвечающего точке A. Тогда, имеем требуемые координаты точки $A = \left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{30}, -\frac{7}{15}\right)$.

3. **Решение:** Исходный ряд преобразуем к виду:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(\ln(3n+2))^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Исследуем сначала этот ряд на сходимость. Он является знакочередующимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, где

$$a_n = \frac{1}{(2n+3)(\ln(3n+2))^{\frac{2}{3}}} > 0.$$

Последовательность $\{a_n\}$, убывая, стремится к нулю. Поэтому, рассматриваемый ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем теперь на сходимость ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+3)(\ln(3n+2))^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Сходимость такого ряда равносильна сходимости ряда:

$$\frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)(\ln(3n+2))^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Применим для анализа сходимости этого ряда интегральный признак. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\frac{3}{2} \cdot \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(3x+2)(\ln(3x+2))^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}\,,$$

где $t = 3x + 2$ — новая переменная. Полученный интеграл расходится, а потому исследуемый ряд также расходится. Таким образом, мы заключаем, что исходный ряд абсолютно расходится и условно сходится.

4. **Решение:** Исходное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Для нахождения его общего решения применим метод вариации постоянных. Согласно этому методу, сначала находим общее решение однородного уравнения в виде: $y_{\text{о,о}}(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, где C_1, C_2 — произвольные константы. Затем, ищем общее решение уже неоднородного уравнения в виде: $y_{\text{о,н}}(x) = C_1(x) + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$, где производные функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = 0, \\ -2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = -\dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{3+\mathrm{e}^{2x}}\,. \end{cases}$$

Из этой системы мы находим выражения:

$$C_1'(x) = -\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{3+\mathrm{e}^{2x}}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{4x}}{3+\mathrm{e}^{2x}}\,.$$

Интегрируя эти выражения, получаем формулы для функций $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\ln\left(3 + \mathrm{e}^{2x}\right) + C_1^*, \qquad C_2(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\ln\left(3 + \mathrm{e}^{2x}\right) + C_2^*,$$

где C_1^*, C_2^* — произвольные константы. Подставляя эти формулы в формулу общего решения неоднородного уравнения $y_{\text{о,н}}(x)$, после надлежащих преобразований окончательно имеем требуемое выражение:

$$y_{\text{о,н}}(x) = C_1^* + C_2^*\mathrm{e}^{-2x} + \Big(1 - \left(1 + 3\mathrm{e}^{-2x}\right)\ln\left(3 + \mathrm{e}^{2x}\right)\Big).$$

5. **Решение:** В области $|z - i| < 2$ подинтегральная функция $f(z) = \mathrm{e}^{z^{-2}}\left(z^2 + 4\right)^{-1}$ имеет две особые точки $z = 0$ и $z = 2i$. Легко установить, что точка $z = 2i$ есть полюс первого порядка, а потому

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{\mathrm{e}^{z^{-2}}}{z + 2i} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}}{4i}\ .$$

Точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $\mathrm{e}^{z^{-2}}$ и предел $\lim\limits_{z\to 0}\left(z^2 + 4\right)^{-1}$ существует и не равен нулю. Поэтому, она является таковой и для функции $f(z)$. Значит, для нахождения вычета в этой точке найдем коэффициент c_{-1} соответствующего разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана. Имеем выражение:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^{2n}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^{k+1}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m z^m.$$

Из анализа этого выражения мы заключаем, что $c_{-1} = 0$. Значит, $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$. Поэтому, окончательно находим

$$\oint\limits_{|z-i|=2} f(z)\, dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=2i} f(z)\Big) = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\ .$$

6. **Решение:** Из условия задачи мы имеем формулу:

$$z = (x_1 < y_1) \vee (x_1 \le y_1)\&(x_2 \le y_2).$$

Отсюда мы находим выражение:

$$z = (\bar{x}_1\&y_1) \vee (\bar{x}_1 \vee y_1)\&(\bar{x}_2 \vee y_2).$$

Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2017)

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3(\sin x)^2 + (\cos x)^2} \ .$$

2. Среди всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от заданных точек $B(3,3,1)$ и $C(4,1,2)$, найти координаты такой точки A, которая наименее удалена от начала координат.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi + 3\pi n)}{(3n+4)\sqrt[4]{(\ln(4n+3))^3}} \ .$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) - 2y'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{-2x}}{5 + \mathrm{e}^{-2x}} \ .$$

5. Вычислить интеграл в комплексной плоскости

$$\oint_{|z+1|=3} \frac{\sin(z^{-2})}{z^2 - 9}\, dz \ .$$

6. В базисе $B = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ из функциональных элементов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности не более 7 с входами x_1, x_2, y_1, y_2 и выходом z, на котором появляется 1 в том и только в том случае, когда число $x = 2 \cdot x_1 + x_2$ больше числа $y = 2 \cdot y_1 + y_2$. (Здесь $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0; 1\}$, $+$ и $\cdot$ обозначают соответственно операции сложения и умножения целых чисел.)

7. Написать программу, принимающую на стандартный ввод текст с записями о проходах через пропускной пункт. Проходы случаются не чаще, чем 1 раз в секунду. О каждом проходе в тексте есть либо запись вида: $hms1$ (если это проход в прямом направлении — вход); либо запись вида: $hms - 1$ (если это проход в обратном направлении — выход). Все части записи разделены одинарными пробелами, $0 \le h \le 23$, $0 \le m, s \le 59$; $h, m, s \in \mathrm{Z}$. Записи находятся на отдельных строках. В тексте содержатся неупорядоченные неповторяющиеся записи за одни сутки. В первой строке текста дано количество записей n, $0 < n < 86401$. Программа, разделив сутки на часы (1-й, 2-й, …, 24-й), должна найти тот час, в течение которого произошло наименьшее ненулевое количество проходов. Если таких часов несколько, то искомым является более ранний. Часы, в течение которых не было проходов, не должны учитываться при поиске. Программа должна вывести в формате hms время самого раннего прохода, осуществленного в найденный час. Если во вводе нет записей о проходах, то программа должна вывести -1.

Указание: Программа должна быть эффективной по вычислениям. Объём используемой памяти должен быть мал и не должен зависеть от ввода. Неэффективное по вычислениям и/или по памяти решение рассматривается как ошибочное. Допустимые языки: Free Pascal, Delphi, C, C++.

Пример ввода:

```
6
1 2 10 -1
3 0 0 1
1 3 0 1
2 5 15 -1
3 0 2 1
1 2 0 -1
```

Вывод программы: 2 5 15

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 2

1. **Решение:** Выполняя замену переменных $t = \operatorname{tg} x$, имеем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3(\sin x)^2 + (\cos x)^2} = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{3t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} .$$

2. **Решение:** Точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от заданных точек B и C, расположены в плоскости α, перпендикулярной отрезку BC и проходящей через его середину D. Значит, вектор $\overline{BC}$ является нормалью этой плоскости. Находим: $\overline{BC} = (1, -2, 1)$, $D = (3.5, 2, 1.5)$. Тогда, уравнение плоскости α имеет вид: $x - 2y + z - 1 = 0$.

Искомая точка A является точкой пересечения плоскости α и прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно этой плоскости. Значит, вектор $\overline{BC}$ служит направляющим вектором этой прямой, а потому ее каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$. Найдем координаты точки A. Для этого, перепишем каноническое уравнение прямой в параметрическом виде: $x = t$, $y = -2t$, $z = t$, $t \in \mathrm{R}$. Затем, подставляя полученные выражения в уравнение плоскости α, найдем значение параметра $t_* = \frac{1}{6}$, отвечающего точке A. Тогда, имеем требуемые координаты точки $A = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

3. **Решение:** Исходный ряд преобразуем к виду:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n+4)(\ln(4n+3))^{\frac{3}{4}}} .$$

Исследуем сначала этот ряд на сходимость. Он является знакочередующимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, где

$$a_n = \frac{1}{(3n+4)(\ln(4n+3))^{\frac{3}{4}}} > 0.$$

Последовательность $\{a_n\}$, убывая, стремится к нулю. Поэтому, рассматриваемый ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем теперь на сходимость ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+4)(\ln(4n+3))^{\frac{3}{4}}} .$$

Сходимость такого ряда равносильна сходимости ряда:

$$\frac{4}{3} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)(\ln(4n+3))^{\frac{3}{4}}} .$$

Применим для анализа сходимости этого ряда интегральный признак. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\frac{4}{3} \cdot \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(4x+3)(\ln(4x+3))^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{3} \cdot \int\limits_{7}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} ,$$

где $t = 4x + 3$ — новая переменная. Полученный интеграл расходится, а потому исследуемый ряд также расходится. Таким образом, мы заключаем, что исходный ряд абсолютно расходится и условно сходится.

4. **Решение:** Исходное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Для нахождения его общего решения применим метод вариации постоянных. Согласно этому методу, сначала находим общее решение однородного уравнения в виде: $y_{\text{о,о}}(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{2x}$, где C_1, C_2 — произвольные константы. Затем, ищем общее решение уже неоднородного уравнения в виде: $y_{\text{о,н}}(x) = C_1(x) + C_2(x)\mathrm{e}^{2x}$, где производные функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\mathrm{e}^{2x} = 0, \\ 2C_2'(x)\mathrm{e}^{2x} = \dfrac{4\mathrm{e}^{-2x}}{5+\mathrm{e}^{-2x}} . \end{cases}$$

Из этой системы мы находим выражения:

$$C_1'(x) = -\frac{2\mathrm{e}^{-2x}}{5+\mathrm{e}^{-2x}} , \qquad C_2'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{-4x}}{5+\mathrm{e}^{-2x}} .$$

Интегрируя эти выражения, получаем формулы для функций $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \ln\left(5 + \mathrm{e}^{-2x}\right) + C_1^*, \qquad C_2(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + 5\ln\left(5 + \mathrm{e}^{-2x}\right) + C_2^*,$$

где C_1^*, C_2^* — произвольные константы. Подставляя эти формулы в формулу общего решения неоднородного уравнения $y_{\text{О,Н}}(x)$, после надлежащих преобразований окончательно имеем требуемое выражение:

$$y_{\text{О,Н}}(x) = C_1^* + C_2^*\mathrm{e}^{2x} - \Big(1 - \left(1 + 5\mathrm{e}^{2x}\right)\ln\left(5 + \mathrm{e}^{-2x}\right)\Big).$$

5. **Решение:** В области $|z+1| < 3$ подинтегральная функция $f(z) = \sin\left(z^{-2}\right)\left(z^2 - 9\right)^{-1}$ имеет две особые точки $z = 0$ и $z = -3$. Легко установить, что точка $z = -3$ есть полюс первого порядка, а потому

$$\mathrm{res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to-3} \frac{\sin\left(z^{-2}\right)}{z-3} = -\frac{\sin\left(\frac{1}{9}\right)}{6}\ .$$

Точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $\sin\left(z^{-2}\right)$ и предел $\lim\limits_{z\to 0}\left(z^2 - 9\right)^{-1}$ существует и не равен нулю. Поэтому, она является таковой и для функции $f(z)$. Значит, для нахождения вычета в этой точке найдем коэффициент c_{-1} соответствующего разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана. Имеем выражение:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+2}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{9^{k+1}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m z^m.$$

Из анализа этого выражения мы заключаем, что $c_{-1} = 0$. Значит, $\mathrm{res}_{z=0} f(z) = 0$. Поэтому, окончательно находим

$$\oint_{|z+1|=3} f(z)\, dz = 2\pi i\Big(\mathrm{res}_{z=0} f(z) + \mathrm{res}_{z=-3} f(z)\Big) = -\frac{\pi i}{3}\sin\left(\frac{1}{9}\right)\ .$$

6. **Решение:** Из условия задачи мы имеем формулу:

$$z = (x_1 > y_1) \vee (x_1 \geq y_1) \& (x_2 > y_2).$$

Отсюда мы находим выражение:

$$z = (x_1 \& \bar{y}_1) \vee (x_1 \vee \bar{y}_1) \& (x_2 \& \bar{y}_2).$$