Теория неподвижных точек

Лекция 1

Теорема Брауэра

Пусть $M_n = \left\{ x = \left(x_1, \ldots, x_n \right) \geq 0 \left| \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right. \right\}$ и $f : M_n \to M_n$ непрерывное отображение. Тогда существует $x^* \in M_n$, такой, что $f\left(x^* \right) = x^*$.

Теорема Фань Цзы

Пусть E выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая условиям:

1. $\forall y \in E$ функция $x \to \varphi(x, y)$ полунепрерывна снизу по x на E;

2. $\forall x \in E$ функция $y \to \varphi(x, y)$ вогнута по y на E.

Тогда $\exists x^* \in E$, такой, что

$$\sup_{y \in E} \varphi(x^*, y) \leq \sup_{y \in E} \varphi(y, y).$$

Следствия

Теорема Брауэра. Пусть E выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $f : E \to E$ непрерывное отображение. Тогда существует $x^* \in E$, такой, что $f\left(x^*\right) = x^*$.

Доказательство. Выберем $\varphi(x, y) = \left\langle x - f(x), x - y \right\rangle$.

По теореме Фань Цзы существует $x^* \in E$ такой, что $\forall y \in E \ \left\langle x^* - f\left(x^*\right), x^* - y \right\rangle \le 0.$ Полагая $y = f\left(x^*\right)$, получаем, что $\left\langle x^* - f\left(x^*\right), x^* - f\left(x^*\right) \right\rangle \le 0 \Rightarrow x^* = f\left(x^*\right)$.

Следствия

Определение. Опорной функцией множества $K \subset \mathbb{R}^n$ называется функция от переменной $p \in \mathbb{R}^n$ $\rho(K, p) = \sup\limits_{x \in K} \langle p, x \rangle.$

Определение. Многозначное отображение $C : E \to 2^{\mathbb{R}^n}$ называется слабо полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in K$, если $\forall p \in \mathbb{R}^n$ функция $\rho(C(x), p)$ полунепрерывна сверху по x в x_0.

Теорема Гейла-Никайдо-Дебре

Пусть $C : M_n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ многозначное отображение с непустыми значениями. Если

1. C слабо полунепрерывно сверху;
2. $\forall x \in M_n$ множество $C(x) - \mathbb{R}^n_+$ выпуклый компакт;
3. $\forall x \in M_n \quad \rho\left(C(x), x\right) \geq 0$ (закон Вальраса),

то $\exists x^* \in M_n$, такой, что $C\left(x^*\right) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$.

Доказательство

Выберем функцию $\varphi : M_n \times M_n \to \mathbb{R}$ в виде

$$\varphi(x, y) = -\rho(C(x), y).$$

Эта функция полунепрерывна снизу по x и вогнута по y. По теореме Фань Цзы $\exists x^* \in M_n$, такой, что $\sup\limits_{y \in M_n} -\rho(C(x^*), y) \le \sup\limits_{y \in M_n} -\rho(C(y), y)$. Откуда, учитывая предположение 3 (закон Вальраса), получаем, что $\forall y \in M_n \quad 0 \le \rho(C(x^*), y).$

Доказательство

Поскольку

$$\rho\left(-\mathbb{R}_+^n, y\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } y \in \mathbb{R}_+^n, \\ +\infty, \text{ если } y \notin \mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

имеем, что $\forall y \in \mathbb{R}^n \;\; \rho\left(C\left(x^*\right) - \mathbb{R}_+^n, y\right) \geq 0 = \rho\left(\left\{0\right\}, y\right)$.

В силу выпуклости и замкнутости множества $C\left(x^*\right) - \mathbb{R}_+^n$ получаем, что $0 \in C\left(x^*\right) - \mathbb{R}_+^n$.

Вспомогательные утверждения для доказательства теоремы Фань Цзы

Обозначим

$$v^{+} = \inf_{x\in E} \sup_{y\in F} f(x,y),\ v^{-} = \sup_{y\in Y} \inf_{x\in E} f(x,y).$$

Пусть $\mathfrak{I} = \{K \mid K \subset F, |K| < \infty\}, v^{\circ} = \sup_{K\in\mathfrak{I}} \inf_{x\in E} \sup_{y\in K} f(x,y).$

Тогда $\quad v^{-} \le v^{\circ} \le v^{+}.$

Предложение 1

Предположим, что множество E компактно и $\forall y \in F$ функция $f(x, y)$ полунепрерывна снизу по x на E. Тогда

1. существует $\hat{x} \in E$, такой, что $\sup\limits_{y \in F} f(\hat{x}, y) = v^+$;
2. $v^\circ = v^+$.

Доказательство. Функция $\sup\limits_{y \in F} f(x, y)$ полунепрерывна снизу как супремум полунепрерывных снизу функций.

Доказательство предложения 1

По теореме Вейерштрасса полунепрерывная снизу функция достигает инфимума на компакте.

Достаточно доказать, что $\exists x^* \in E$ такой, что

$$\sup_{y \in F} f\left(x^*, y\right) \le v^\circ.$$

Действительно, $v^+ \le \sup_{y \in F} f\left(x^*, y\right) \le v^0 \le v^+ \Rightarrow v^0 = v^+.$

Доказательство предложения 1

Положим $S_y = \left\{ x \in E \middle| f(x,y) \le v^0 \right\}$.

Достаточно доказать, что $\exists x^* \in \bigcap\limits_{y \in F} S_y$.

Из полунепрерывности по x функции $f(x,y)$ следует, что множество S_y замкнуто. Выберем произвольное множество $K = \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathfrak{I}$.

Функция $\sup\limits_{y \in K} f(x,y)$ полунепрерывна снизу по x на компакте E. По теореме Вейерштрасса

$$\exists \tilde{x} \in E \quad \max_{y \in K} f(\tilde{x}, y) = \inf_{x \in E} \max_{y \in K} f(x,y) \le \sup_{K \in \mathfrak{I}} \inf_{x \in E} \max_{y \in K} f(x,y) = v^0.$$

Доказательство предложения 1

Откуда имеем, что $\tilde{x} \in \bigcap_{y \in K} S_y$.

Таким образом, $\left\{ S_y \,\middle|\, y \in F \right\}$ центрированное семейство замкнутых подмножеств компакта E.

Следовательно,

$$\bigcap_{y \in F} S_y \neq \varnothing.$$

Лемма о непрерывном разбиении единицы

Пусть $\{A_1, \ldots, A_n\}$ открытое покрытие метрического пространства E. Существует семейство неотрицательных, непрерывных функций $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ на E таких, что

1. $\forall x \in E \ \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = 1$; 2. $\forall j = 1, \ldots, n \ \operatorname{supp} f_j(x) \subset A_j$.

Говорят, что $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ разбиение единицы, подчинённое открытому покрытию $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Доказательство леммы

Шаг 1. Пусть M и N непустые, замкнутые, непересекающиеся подмножества E. Тогда существует непрерывная функция $g(x):\mathrm{E}\to[0,1]$ такая, что $\forall x\in \mathrm{M}\ \ g(x)=0,\ \forall x\in \mathrm{N}\ g(x)=1.$

Действительно, можно положить

$$g(x)=\frac{d(x,\mathrm{M})}{d(x,\mathrm{M})+d(x,\mathrm{N})}.$$

Доказательство леммы

Шаг 2. Пусть $E = A \bigcup B$, где A и B открытые множества. Тогда существует открытое множество W такое, что $\overline{W} \subset A, E = W \bigcup B$. Положим $W = E$, если $A = E$, и $W = \varnothing$, если $B = E$. Предположим теперь, что $A \neq E, B \neq E$. Тогда $M = E \setminus A, N = E \setminus B$ непустые, замкнутые непересекающиеся подмножества E.

Доказательство леммы

В силу «шага1» существует непрерывная функция $g(x):E\to[0,1]$ такая, что $\forall x\in M\quad g(x)=0,\ \forall x\in N\ g(x)=1$. Положим

$$W=\left\{x\in E\middle|g(x)>\frac{1}{2}\right\}.$$

В силу непрерывности $g(x)$ множество W открыто.

Доказательство леммы

Так как

$$\overline{W} \subset \left\{ x \in E \middle| g(x) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Тогда $E \setminus A \subset E \setminus \overline{W}$. Следовательно, $\overline{W} \subset A$.

Если $x \notin B$, то $g(x) = 1$ и, значит, $x \in W$.

Откуда получаем, что $E = W \bigcup B$.

Доказательство леммы

Шаг 3. Пусть $\{A_1, \dots, A_n\}$ открытое покрытие E.
Тогда существует открытое покрытие $\{W_1, \dots, W_n\}$
такое, что

$$\overline{W_j} \subset A_j \quad j = 1, \dots, n; E = \bigcup_{j=1}^{n} W_j.$$

Положим $A = A_1, B = \bigcup_{j=2}^{n} A_j.$ В силу «шага 2»
существует открытое множество W_1 такое, что

$$\overline{W_1} \subset A_1, E = W_1 \cup B = W_1 \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j \right).$$

Доказательство леммы

Предположим, что построены открытые множества $\left\{W_j \,\middle|\, j=1,\dots,k-1\right\}$ такие, что $\overline{W_j} \subset A_j \ j=1,\dots,k-1,$ и $E = \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} W_j\right) \cup \left(\bigcup_{i=k}^{n} A_i\right).$

Положим

$$A = A_k, B = \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} W_j\right) \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i\right)$$

В силу «шага 2» существует открытое множество W_k такое, что

$$\overline{W_k} \subset A_k, E = W_k \cup B = \left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right) \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i\right).$$

Доказательство леммы

Индукция позволяет завершить обоснование шага 3.

Шаг 4. В силу «шага 3» построим открытые множества $\{W_1, \ldots, W_n\}$ такие , что

$$\overline{W_j} \subset A_j \quad j = 1, \ldots, n; E = \bigcup_{j=1}^{n} W_j.$$

Из $\quad E = \bigcup_{j=1}^{n} W_j \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} \left(E \setminus W_j \right) = \varnothing \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d\left(x, E \setminus W_i \right) > 0.$

Доказательство леммы

Тогда

$$f_j(x) = \frac{d\left(x, E \setminus W_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} d\left(x, E \setminus W_i\right)}, \; j = 1, \dots, n,$$

образуют непрерывное разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $\left\{A_1, \dots, A_n\right\}$.

Оптимальные правила принятия решений

Обозначим через $\wp$ множество правил принятия решений игрока, который выбирает стратегию $y = D(x)$, т.е. $\wp = \{D : E \to F\}$.

Замечание. Покажем, что

$$\sup_{D \in \wp} \inf_{x \in E} f\left(x, D(x)\right) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y).$$

Действительно, $\forall D \in \wp \; f\left(x, D(x)\right) \leq \sup_{y \in F} f(x, y)$.

Следовательно, $\forall D \in \wp \; \inf_{x \in E} f\left(x, D(x)\right) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y)$

$$\Rightarrow \sup_{D \in \wp} \inf_{x \in E} f\left(x, D(x)\right) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y).$$

Оптимальные правила принятия решений

С другой стороны, $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E \, \exists D_\varepsilon : E \to F$

такое, что

$$\sup_{y\in F} f(x,y) \le f\left(x, D_\varepsilon(x)\right) + \varepsilon, \text{ если } \sup_{y\in F} f(x,y) < +\infty,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \le f\left(x, D_\varepsilon(x)\right), \text{ если } \sup_{y\in F} f(x,y) = +\infty.$$

Откуда имеем, что

$$\inf_{x\in E} \sup_{y\in F} f(x,y) \le \sup_{D\in\wp} \inf_{x\in E} f\left(x, D(x)\right) + \varepsilon$$

Оптимальные правила принятия решений

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$\inf_{x\in E} \sup_{y\in F} f(x,y) = \sup_{D\in\wp} \inf_{x\in E} f\big(x, D(x)\big).$$

Обозначим через $\wp_C = \big\{D \in C(E,F)\big\}$ множество непрерывных отображений из E в F.

Поскольку $\wp_C \subset \wp$, имеем, что

$$\inf_{x\in E} \sup_{y\in F} f(x,y) \ge \sup_{D\in\wp_C} \inf_{x\in E} f\big(x, D(x)\big).$$

Предложение 2

Предположим, что

1. множество E компакт;
2. $\forall y \in F$ функция $f(x, y)$ полунепрерывна снизу по x на E;
3. множество F выпукло;
4. $\forall x \in E$ функция $f(x, y)$ вогнута по y на F.

Тогда $\inf\limits_{x \in E} \sup\limits_{y \in F} f(x, y) = \sup\limits_{D \in \wp_C} \inf\limits_{x \in E} f(x, D(x))$.

Доказательство предложения 2

Достаточно доказать, что

$$\inf_{x\in E}\sup_{y\in F} f(x,y) \le \sup_{D\in\wp_C}\inf_{x\in E} f(x,D(x)).$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для $\forall x \in E$ определим отображение $D_\varepsilon \in \wp$ так, что

$$\sup_{y\in F} f(x,y) \le f(x,D_\varepsilon(x)) + \varepsilon, \text{ если } \sup_{y\in F} f(x,y) < +\infty,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \le f(x,D_\varepsilon(x)), \text{ если } \sup_{y\in F} f(x,y) = +\infty.$$

Доказательство предложения 2

Поскольку функция $f(x, y)$ полунепрерывна снизу по x, существует $\eta(x) > 0$ такая, что $\forall z \in B(x, \eta(x)) = \{\tilde{x} \| \|\tilde{x} - x\| < \eta(x)\}$ справедливо, что

$$f\left(x, D_\varepsilon(x)\right) \le f\left(z, D_\varepsilon(x)\right) + \varepsilon.$$

Доказательство предложения 2

Поскольку $E = \bigcup\limits_{x \in E} B\left(x, \eta(x)\right)$ и E компакт,

существует конечное покрытие E открытыми шарами $\left\{B\left(x_1, \eta(x_1)\right), \ldots, B\left(x_n, \eta(x_n)\right)\right\}$.

Пусть $\left\{g_1(x), \ldots, g_n(x)\right\}$ непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию

$\left\{B\left(x_1, \eta(x_1)\right), \ldots, B\left(x_n, \eta(x_n)\right)\right\}$.

Доказательство предложения 2

Положим $D(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) D_\varepsilon(x_j)$. Тогда $D(x) \in \wp_C$.

Обозначим $I(x) = \left\{ j \middle| g_j(x) > 0 \right\}$. Отметим, что $I(x) \neq \varnothing$. В силу вогнутости функции $f(x, y)$ по y имеем, что

$$f(x, D(x)) \geq \sum_{j \in I(x)} g_j(x) f\left(x, D_\varepsilon(x_j)\right).$$

Доказательство предложения 2

Если $g_j(x) > 0$, то $x \in B\left(x_j, \eta\left(x_j\right)\right)$ и

$$f\left(x, D_\varepsilon\left(x_j\right)\right) \geq f\left(x_j, D_\varepsilon\left(x_j\right)\right) - \varepsilon \geq \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sup_{y \in F} f\left(x_j, D_\varepsilon\left(x_j\right)\right)\right) - \varepsilon$$

Поскольку

$$\min\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sup_{y \in F} f\left(x_j, D_\varepsilon\left(x_j\right)\right)\right) \geq \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, v^+ - \varepsilon\right), \; j = 1, \ldots, n,$$

получаем, что

$$\forall x \in E \quad f\left(x, D\left(x\right)\right) \geq \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, v^+ - \varepsilon\right) - \varepsilon.$$

Доказательство предложения 2

Откуда
$$\inf_{x\in E} f\left(x, D(x)\right) \geq \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, v^{+} - \varepsilon\right) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем, что

$$\sup_{D\in\wp_C} \inf_{x\in E} f\left(x, D(x)\right) \geq v^{+} = \inf_{x\in E} \sup_{y\in F} f\left(x, y\right).$$

Предложение 3

Пусть $\Re_C = \left\{ A : F \to E \middle| A(y) \in C(F,G) \right\}$. Предположим, что

1. множество E компакт;
2. $\forall y \in F$ функция $f(x,y)$ полунепрерывна снизу по x на E;
3. множество F выпукло;
4. $\forall x \in E$ функция $f(x,y)$ вогнута по y на F.

Тогда

$$\inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x,y) = \inf_{A \in \Re_C} \sup_{y \in F} f(A(y),y).$$

Доказательство предложения 3

Поскольку постоянные отображения $A(y) \equiv x$ являются непрерывными, справедливо неравенство

$$\inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y) \geq \inf_{A \in \Re_C} \sup_{y \in F} f(A(y), y).$$

Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y) \leq \inf_{A \in \Re_C} \sup_{y \in F} f(A(y), y).$$

Доказательство предложения 3

В силу предложения 1

$$\inf_{x\in E}\sup_{y\in F} f(x,y)=\sup_{K\in\mathfrak{I}}\inf_{x\in E}\max_{y\in K} f(x,y).$$

Поэтому достаточно для любого конечного множества $K=\{y_1,\dots,y_n\}\subset F$ и любого непрерывного отображения $A:F\to E$ справедливо неравенство

$$\inf_{x\in E}\max_{j=1,\dots,n} f(x,y_j)\le\sup_{y\in F} f(A(y),y).$$

Доказательство предложения 3

Заметим, что

$$\inf_{x\in E}\max_{j=1,\dots,n} f\left(x, y_j\right) = \inf_{x\in E}\sup_{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in M_n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f\left(x, y_j\right) \le$$

$$\le \inf_{\mu\in M_n}\sup_{\lambda\in M_n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f\left(A\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i\right), y_j\right) = \inf_{\mu\in M_n}\sup_{\lambda\in M_n}\varphi(\mu,\lambda), \qquad (1)$$

где $\varphi(\mu,\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f\left(A\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i\right), y_j\right).$

Доказательство предложения 3

Поскольку $A(y)$ непрерывное отображение, а $f(x, y)$ полунепрерывная снизу функция по x, функция $\varphi(\mu, \lambda)$ полунепрерывна по μ. Функция $\varphi(\mu, \lambda)$ линейна, а, значит, вогнута по λ. Множество M_n стандартный симплекс и, следовательно, выпуклый компакт.

Доказательство предложения 3

Таким образом, выполнены все условия предложения 2. Поэтому

$$\inf_{\mu\in M_n}\sup_{\lambda\in M_n}\varphi(\lambda,\mu)=\sup_{D\in C(M_n,M_n)}\inf_{\mu\in M_n}\varphi(\mu,D(\mu)). \qquad (2)$$

По теореме Брауэра непрерывное отображение $D:M_n\to M_n$ имеет неподвижную точку

$\mu_D\in M_n,\ D(\mu_D)=\mu_D.$

Доказательство предложения 3

Заметим, что

$$\inf_{\mu\in M_n} \varphi\left(\mu, D\left(\mu\right)\right) \le \varphi\left(\mu_D, D\left(\mu_D\right)\right) = \varphi\left(\mu_D, \mu_D\right) \le \sup_{\mu\in M_n} \varphi\left(\mu,\mu\right).$$

Откуда получаем, что

$$\sup_{D\in C\left(M_n, M_n\right)} \inf_{\mu\in M_n} \varphi\left(\mu, D\left(\mu\right)\right) \le \sup_{\mu\in M_n} \varphi\left(\mu,\mu\right). \qquad (3)$$

Доказательство предложения 3

С другой стороны, в силу вогнутости функции $f(x, y)$ по y имеем, что

$$\varphi(\mu, \mu) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i\right), y_j\right) \le f\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i\right), \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j\right)$$

$$\le \sup_{y \in F} f(A(y), y). \qquad (4)$$

Из (1)-(4) следует, что

$$\inf_{x \in E} \max_{j=1,\dots,n} f(x, y_j) \le \sup_{y \in F} f(A(y), y).$$

Неравенство Фань Цзы

Пусть E выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая условиям:

1. $\forall y \in E$ функция $x \to \varphi(x, y)$ полунепрерывна снизу по x на E;

2. $\forall x \in E$ функция $y \to \varphi(x, y)$ вогнута по y на E.

Тогда $\exists x^* \in E$, такой, что

$$\sup_{y \in E} \varphi(x^*, y) \le \sup_{y \in E} \varphi(y, y).$$

Доказательство неравенства Фань Цзы

В силу предложения 1 с учётом того, что по условию $F = E$, существует $x^* \in E$ такой, что

$$\sup_{y \in E} f(x^*, y) = \inf_{x \in E} \sup_{y \in E} f(x, y)$$

В силу предложения 3 имеем, что

$$\inf_{x \in E} \sup_{y \in E} f(x, y) \le \inf_{A \in C(E,E)} \sup_{y \in E} f(A(y), y).$$

Поскольку $A(y) = y \in C(E, E)$, имеем, что

$$\inf_{A \in C(E,E)} \sup_{y \in E} f(A(y), y) \le \sup_{y \in E} f(y, y).$$

Теорема существования нулей

Пусть K выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $C : K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ слабо полунепрерывно сверху, $\forall x \in K \;\; C(x)$ непустое, выпуклое, замкнутое множество и выполнено тангенциальное условие $\forall x \in K \;\; C(x) \bigcap T_K(x) \neq \varnothing$. Тогда $\exists \hat{x} \in K$ такой, что $0 \in C(\hat{x})$.

Доказательство теоремы существования нулей

Предположим противное, что $\forall x \in K \; 0 \notin C(x)$.

Поскольку $C(x)$ непустое, выпуклое,

замкнутое множество, точку 0 можно строго

отделить от $C(x)$. Следовательно,

$$\forall x \in K \; \exists p \in \mathbb{R}^n \qquad \rho(C(x), p) < 0.$$

Положим $\Delta_p = \left\{ x \in K \middle| \rho(C(x), p) < 0 \right\}$.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_p \Delta_p$.

Доказательство теоремы существования нулей

В силу слабой полунепрерывности сверху отображения C множества Δ_p открыты. Поскольку K компакт, существует покрытие его конечным числом открытых множеств $\left\{\Delta_{p_j} \middle| j=1,\dots,n\right\}$. Пусть $\left\{g_j(x) \middle| j=1,\dots,n\right\}$ непрерывное разбиение единицы подчиненное открытому покрытию $\left\{\Delta_{p_j} \middle| j=1,\dots,n\right\}$.

Доказательство теоремы существования нулей

Определим функцию $\varphi : K \times K \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \langle p_j, x - y \rangle.$$

Функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по x и вогнута по y. По теореме Фань Цзы $\exists \hat{x} \in K$ такой, что $\sup\limits_{y \in K} \varphi(\hat{x}, y) \le \sup\limits_{y \in K} \varphi(y, y) = 0.$

Следовательно,

$$\forall y \in K \ \varphi(\hat{x}, y) = \left\langle \sum_{j=1}^{n} g_j(\hat{x}) p_j, \hat{x} - y \right\rangle \le 0.$$

Доказательство теоремы существования нулей

Таким образом, $\hat{p} = \sum_{j=1}^{n} g_j(\hat{x}) p_j \in \left(T_K(\hat{x})\right)^*$.

Из тангенциального условия следует, что

$\exists v \in C(\hat{x}) \bigcap T_K(\hat{x})$ и, значит, $\rho\left(C(\hat{x}), \hat{p}\right) \geq \langle \hat{p}, v \rangle \geq 0.$

С другой стороны, в силу выпуклости опорной функции имеем, что

$$\rho\left(C(\hat{x}), \hat{p}\right) = \rho\left(C(\hat{x}), \sum_{j=1}^{n} g_j(\hat{x}) p_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(\hat{x}) \rho\left\langle C(\hat{x}), p_j \right\rangle.$$

Доказательство теоремы существования нулей

Если $g_j(\hat{x}) > 0$, то «по построению» $\rho\left(C(\hat{x}), p_j\right) < 0.$

Поскольку $g_j(\hat{x}) \geq 0 \;\; j = 1, \ldots, n, \; \sum_{j=1}^{n} g_j(\hat{x}) = 1,$

получаем, что $\rho\left(C(\hat{x}), \hat{p}\right) < 0.$

Противоречие.

Теорема Какутани

Пусть K выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $D: K \to 2^K$ слабо полунепрерывно сверху, $\forall x \in K \;\; D(x)$ непустое, выпуклое, замкнутое множество. Тогда $\exists \hat{x} \in K$ такой, что $\hat{x} \in D(\hat{x})$.

Доказательство теоремы Какутани

Положим $\mathrm{C}(\mathrm{x}) = \mathrm{D}(\mathrm{x}) - \mathrm{x}$. Заметим, что

$$\mathrm{C}(\mathrm{x}) = \mathrm{D}(\mathrm{x}) - \mathrm{x} \subset \mathrm{K} - \mathrm{x} \subset \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\mathrm{x})$$

и, значит, многозначное отображение $\mathrm{C}(\mathrm{x})$ удовлетворяет тангенциальному условию. По теореме существования нулей существует $\hat{\mathrm{x}} \in \mathrm{K}$ такой, что $0 \in \mathrm{C}(\hat{\mathrm{x}}) \Leftrightarrow \hat{\mathrm{x}} \in \mathrm{D}(\hat{\mathrm{x}})$.