Семинар

17.03.2021

Задача 6

Пусть

$$Y=\{(x,y)\,|\,x=0,-1\le y\le 0\}\cup\{(x,y)\,|\,x=y,0\le y\le 1\}\cup\{(x,y)\,|\,x=-y,0\le y\le 1\}$$

и $f:Y\to Y$ непрерывное отображение.

Можно ли утверждать, у отображения f есть неподвижные точки?

Решение

Теорема Брауэра. Пусть E выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $f: E \to E$ непрерывное отображение. Тогда существует $x^* \in E,$ такой, что $f\left(x^*\right) = x^*.$

Положим $\hat{Y} = \mathrm{conv} Y$. Построим непрерывную ретракцию $g: \hat{Y} \to Y,$ т.е.

$$\forall x \in \hat{Y}\ g\left(x\right) \in Y,\ \forall x \in Y\ g\left(x\right) = x.$$

Решение

Тогда по теореме Брауэра непрерывное отображение $f \circ g : \hat{Y} \to \hat{Y}$ имеет неподвижную точку $x^* \in \hat{Y} \quad f\left(g\left(x^*\right)\right) = x^*.$

Заметим, что $x^* \in Y \Rightarrow g\left(x^*\right) = x^*.$

Следовательно, $f\left(x^*\right) = x^*.$

Задача 3

Рассмотрим модель Курно с двумя производителями, имеющими функции издержек $c_1(x) = c_2(x) = x^2,$ и обратной функцией спроса $P(x) = 1 - x$ Чему равна цена в этой модели Курно? Какое значение примет цена, если производители объединяться в монополию?

Модель Курно

Обозначим объемы производства первого и второго производителя через $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$ соответственно. Цена на рынке $1 - x_1 - x_2.$

Функция выигрыша (прибыли) j-го производителя

$$u_j(x_1, x_2) = x_j P(x_1 + x_2) - c_j(x_j) = x_j(1 - x_1 - x_2) - x_j^2$$

Равновесие по Нэшу в модели Курно

Стандартная задача дополнительности:

$$\frac{\partial u_j(x_1, x_2)}{\partial x_j} \le 0,\ x_j \frac{\partial u_j(x_1, x_2)}{\partial x_j} = 0,\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2.$$

в модели Курно:

$$P(x_1 + x_2) + x_j \frac{dP(x_1 + x_2)}{dx} - \frac{dc_j(x_j)}{dx_j} \le 0,\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2,$$

$$x_j \left(P(x_1 + x_2) + x_j \frac{dP(x_1 + x_2)}{dx} - \frac{dc_j(x_j)}{dx_j} \right) = 0,\ j = 1, 2.$$

Задача 3

Имеем

$$1-2x_1-x_2-2x_1=0$$

$$1-x_1-2x_2-2x_2=0$$

В силу теоремы о единственности равновесия по Нэшу в модели Курно имеем, что $x_1=x_2$.

Следовательно, $x_1=x_2=\dfrac{1}{5}, P\left(x_1+x_2\right)=\dfrac{3}{5}.$

Монополия

Функция издержек монополии

$$c_{М}(x) = \min\left\{c_1(x_1) + c_2(x_2) \middle| x_1 + x_2 = x, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\},$$

$$c_{М}(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Функция выигрыша монополии $xP(x) - c_{М}(x)$

Объём производства монополии $x_{М}$

$$P(x_{М}) + x_{М}\frac{dP(x_{М})}{dx} - \frac{dc_{М}(x_{М})}{dx} \leq 0, x_{М} \geq 0,$$

$$x_{М}\left(P(x_{М}) + x_{М}\frac{dP(x_{М})}{dx} - \frac{dc_{М}(x_{М})}{dx}\right) = 0.$$

Задача 3

Объём производства монополии в задаче 3

$$1-2x_M-x_M=0\Rightarrow x_M=\frac{1}{3},P\left(x_M\right)=\frac{2}{3}>\frac{3}{5}.$$

Ответ: $P_k=\frac{3}{5},P_M=\frac{2}{3}.$

Задача 4.

Рассмотрим модель чистого обмена с двумя видами товаров и двумя потребителями. Пусть начальные запасы первого потребителя $(1,2)$, а функция полезности $\sqrt[3]{x_1 x_2^2}$. Пусть начальные запасы второго потребителя $(3,4)$, а функция полезности $\sqrt[3]{(x_1)^2 x_2}$. Найти отношение равновесных цен на первый и второй товар.

Задача о рациональном поведении потребителя

Пусть начальные запасы $(w_1, w_2) > 0,$ а функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1.$

Задача о рациональном поведении потребителя

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le p_1 w_1 + p_2 w_2$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение задачи о рациональном поведении потребителя

Обозначим через $\lambda \geq 0$ множитель Лагранжа к бюджетному ограничению и составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda \left(p_1 w_1 + p_2 w_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2 \right).$$

По теореме Куна-Таккера

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \alpha \frac{x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}}{x_1} = \lambda p_1,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow (1-\alpha) \frac{x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}}{x_2} = \lambda p_2,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2.$$

Функции спроса потребителя

Спрос потребителя на первый товар равен

$$x_1(p_1, p_2) = \alpha \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2}{p_1},$$

Спрос потребителя на второй товар равен

$$x_2(p_1, p_2) = (1 - \alpha) \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2}{p_2}.$$

Задача 4

В задаче функции спроса первого потребителя

$$x_1^1(p_1,p_2)=\frac{1}{3}\frac{(p_1+2p_2)}{p_1},\quad x_2^1(p_1,p_2)=\frac{2}{3}\frac{(p_1+2p_2)}{p_2}.$$

Функции спроса первого потребителя

$$x_1^2(p_1,p_2)=\frac{2}{3}\frac{(3p_1+4p_2)}{p_1},\quad x_2^2(p_1,p_2)=\frac{1}{3}\frac{(3p_1+4p_2)}{p_2}.$$

Условия равновесия

Равенство спроса и предложения

$$x_1^1(p_1, p_2) + x_1^2(p_1, p_2) = 1 + 3,$$

$$x_2^1(p_1, p_2) + x_2^2(p_1, p_2) = 2 + 4.$$

Откуда $7p_1 + 10p_2 = 12p_1.$

Ответ: $\dfrac{p_1}{p_2} = 2.$

Задача 5.

Найти равновесие в смешанных стратегиях в матричной игре

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Смешанные стратегии в матричной игре

Матричная игра

$$a_{ij} + b_{ij} = 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, k.$$

Смешанные стратегии первого игрока

$$X_1 = \left\{ x = \left(x_1, \ldots, x_m \right) \geq 0 \left| \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right. \right\}.$$

Смешанные стратегии второго игрока

$$X_2 = \left\{ y = \left(y_1, \ldots, y_k \right) \geq 0 \left| \sum_{j=1}^{k} y_j = 1 \right. \right\}.$$

Смешанное расширение матричной игры

Функция выигрыша первого игрока

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_i y_j.$$

Гарантированный результат первого игрока

$$\max_{x \in X_1} \min_{y \in X_2} u(x, y)$$

Гарантированный результат второго игрока

$$\min_{y \in X_2} \max_{x \in X_1} u(x, y)$$

Гарантированный результат

первого игрока

$$v \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge v, \; j = 1, \ldots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \ge 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

или

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{|v|}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{x}_i \ge 1, \; j = 1, \ldots, k;$$

$$\tilde{x}_i \ge 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Гарантированный результат

второго игрока

$$u \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j \le u,\ i = 1, \ldots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = 1,$$

$$y_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, k.$$

или

$$\tilde{y}_j = \frac{y_j}{|u|}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{y}_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \tilde{y}_j \le 1,\ i = 1, \ldots, k;$$

$$\tilde{y}_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, k.$$

Задача 5

Взаимно двойственные задачи линейного программирования

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \to \min$$
$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \ge 1$$
$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \ge 1$$
$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \ge 1$$
$$\tilde{x}_1 \ge 0, \tilde{x}_2 \ge 0$$

$$\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \to \max$$
$$\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \le 1$$
$$2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - \tilde{y}_3 \le 1$$
$$\tilde{y}_1 \ge 0, \tilde{y}_2 \ge 0, \tilde{y}_3 \ge 0,$$

Решение задач линейного программирования

Крайние точки многоугольника

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \ge 1\\ &2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \ge 1\\ &5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \ge 1\\ &\tilde{x}_1 \ge 0, \tilde{x}_2 \ge 0\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 1$$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{1}{3}, \tilde{x}_2 = \frac{1}{3}, 5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 > 1, \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{2}{3}.$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 1$$

$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{2}{7}, \tilde{x}_2 = \frac{3}{7}, \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$$

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 1$$

$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{3}{11}, \tilde{x}_2 = \frac{4}{11},$$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{10}{11} < 1.$$

Решение задач линейного программирования

В силу условий дополняющей нежесткости

$$\tilde{y}_3 = 0,$$

$$\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 = 1$$

$$2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_1 = \frac{1}{3}, \tilde{y}_2 = \frac{1}{3}, \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = 0.$$

Ответ

Смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно равны

$$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right).$$

Задача 7

Рассмотрим модель чистого обмена с n видами товаров и m потребителями. Обозначим через $w_j^i \geq 0$ начальный запас j- го товара у i-го потребителя. Пусть функция полезности i-го потребителя $(i=1,...,m)$ имеет вид

$$u_i(x_1,...,x_n) = A_i(x_1)^{\alpha_1^i}...(x_n)^{\alpha_n^i},$$

где $A_i > 0, \alpha_j^i \geq 0, \alpha_1^i + ... + \alpha_n^i = 1 \ (i=1,...,m; j=1,...,n).$

При каких условиях существует конкурентное равновесие? Какому уравнению удовлетворяют равновесные цены?

Задача о рациональном поведении потребителя

Пусть начальные запасы $\left(w_1,...,w_n\right)\geq 0,$ а функция полезности $u\left(x_1,...,x_n\right)=x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n},0\leq\alpha_j, j=1,...,n,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1.$

Задача о рациональном поведении потребителя

$$u\left(x_1,...,x_n\right)\to\max$$

$$p_1x_1+...+p_nx_n\leq p_1w_1+...+p_nw_n$$

$$x_1\geq 0,...,x_n\geq 0.$$

Решение задачи о рациональном поведении потребителя

Обозначим через $\lambda \geq 0$ множитель Лагранжа к бюджетному ограничению и составим функцию Лагранжа

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} + \lambda(p_1 w_1 + \ldots + p_n w_n - p_1 x_1 - \ldots - p_n x_n).$$

По теореме Куна-Таккера

$$\frac{\partial L(x_1,\ldots,x_n,\lambda)}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j \frac{x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}{x_j} = \lambda p_j,\ j = 1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial L(x_1,\ldots,x_n,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = p_1 w_1 + \ldots + p_n w_n.$$

Функции спроса потребителя

Спрос потребителя на j-й товар равен

$$x_j\left(p_1,\dots,p_n\right)=\alpha_j\,\frac{p_1w_1+\dots+p_nw_n}{p_j}.$$

В задаче функции спроса i-го потребителя на j-й товар

$$x_j^i\left(p_1,\dots,p_n\right)=\alpha_j^i\,\frac{p_1w_1^i+\dots+p_nw_n^i}{p_j}.$$

Условия равновесия

Равенство спроса и предложения на рынке j-го товара $\left(j=1,\ldots,n\right)$

$$\sum_{i=1}^{m} x_j^i\left(p_1,\ldots,p_n\right)=\sum_{i=1}^{m} w_j^i.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_j^i\frac{\sum_{k=1}^{n}p_k w_k^i}{p_j}=\sum_{i=1}^{m} w_j^i,\ \ j=1,\ldots,n.$$

Уравнения на равновесные цены

Обозначим $\Omega_j = \sum_{i=1}^{m} w_j^i, \ j = 1, \dots, n,$

$$a_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_j^i w_k^i}{\Omega_j}, \ j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} p_k = p_j, \ (j = 1, \dots, n).$$

Уравнение на вектор равновесных цен

Обозначим

$$A = \left(a_{jk}\right)\Big|_{j,k=1,\dots,n}, \Theta = \left(\alpha_j^i\right)\Big|_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, W = \left(w_j^i\right)\Big|_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

$$\hat{A} = \Theta W^*, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \dots \\ \Omega_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^* \geq 0,$$

$$Ap = p.$$

Число Фробениуса-Перрона матрицы A

Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\Omega_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j^i w_k^i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^i\right) w_k^i = \sum_{i=1}^{n} w_k^i = \Omega_k, k = 1,\dots,n.$$

В векторной записи

$$A^*\Omega = \Omega \Rightarrow \lambda(A) = 1.$$

Необходимое и достаточное условие существования равновесия: положительность вектора Фробениуса –Перрона матрицы A.

Задача 13 (теорема Шепли)

Пусть $M_n = \left\{ \left(x_1, \dots, x_n \right) \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}$. Поставим в соответствие каждому непустому подмножеству $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ замкнутое подмножество (возможно пустое) F_T так, что выполнено условие

$$M_T = \left\{ \left(x_1, \dots, x_n \right) \in M_n \,\middle|\, x_j = 0 \text{ при } j \notin T \right\} \subseteq \bigcup_{S \subseteq T} F_S.$$

Доказать, что существуют неотрицательные числа $\{m_T\}$ такие, что 1) для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ $\sum_{\{T | j \in T\}} m(T) = 1$ 2) $\bigcap_{\{T | m(T) > 0\}} F_T \neq \varnothing$.

Теорема существования нулей

Пусть K выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ и многозначное отображение $\mathrm{C}:\mathrm{K}\to 2^{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}$ слабо полунепрерывно сверху, $\forall \mathrm{x}\in \mathrm{K}\ \ \mathrm{C}(\mathrm{x})$ непустое, выпуклое, замкнутое множество и выполнено тангенциальное условие $\forall \mathrm{x}\in \mathrm{K}\ \ \mathrm{C}(\mathrm{x})\bigcap \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\mathrm{x})\neq\varnothing$. Тогда $\exists \hat{\mathrm{x}}\in \mathrm{K}$ такой, что $0\in \mathrm{C}(\hat{\mathrm{x}})$.

Решение

Пусть $S \subset N = \{1,\ldots,n\}$. Положим $\vec{c}_S = \left(c_1(S),\ldots,c_n(S)\right)$

где

$$c_j(S) = \begin{cases} 1, \text{ если } j \in S, \\ 0, \text{ если } j \notin S. \end{cases}$$

Определим

$$C(x) = \frac{1}{n}\vec{c}_N - \overline{\operatorname{conv}\left\{\frac{1}{|S|}\vec{c}_S\right\}_{x \in F_S}}$$

Решение

Отображение $C : M_n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ полунепрерывно сверху с непустыми, выпуклыми, компактными значениями. Проверим выполнение тангенциального условия $\forall x \in M_n \;\; C(x) \bigcap T_{M_n}(x) \neq \varnothing$.

Зафиксируем $\hat{x} \in M_n$. Обозначим $T = \left\{ j \,\middle|\, \hat{x}_j > 0 \right\}$.

Поскольку $M_T = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in M_n \,\middle|\, x_j = 0 \text{ при } j \notin T \right\} \subseteq \bigcup\limits_{S \subseteq T} F_S$,

существует множество $R \subseteq T$, такое, что $\hat{x} \in F_R$.

Решение

Тогда $\vec{y} = \left(y_1, \ldots, y_n\right) = \frac{1}{n}\vec{c}_N - \frac{1}{|R|}\vec{c}_R \in C\left(\hat{x}\right)$

С другой стороны, $\vec{y} \in T_{M_n}\left(\hat{x}\right)$, т.к. $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$ и, если $\hat{x}_j = 0,$ то $y_j = \left[\frac{1}{n}\vec{c}_N - \frac{1}{|R|}\vec{c}_R\right]_j = \frac{1}{n} \geq 0,$ поскольку $j \notin T \Rightarrow j \notin R.$ Следовательно, $\vec{y} \in C\left(\hat{x}\right) \bigcap T_{M_n}\left(\hat{x}\right).$

По теореме о существовании нулей $\exists x^* \in M_n$ такой, что $0 \in C\left(x^*\right).$ Тогда существуют числа $\left\{\lambda(S) \geq 0 \middle| x^* \in S\right\}$ такие, что $\vec{c}_N = \sum_{\left\{S \middle| x^* \in F_S\right\}} \frac{\lambda(S)n}{|S|}\vec{c}_S,\ x^* \in \bigcap_{x^* \in F_S} F_S.$

Задача 14

Пусть X и Y непустые, компактные, выпуклые множества в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Пусть M и N замкнутые подмножества $X \times Y$ такие, что для любых $x \in X, y \in Y$ множества $M_x = \left\{\tilde{y} \middle| (x, \tilde{y}) \in M\right\}, N_y = \left\{\tilde{x} \middle| (\tilde{x}, y) \in N\right\}$ являются непустыми выпуклыми множествами.

Доказать, что $M \cap N \neq \varnothing$.

Теорема Какутани

Пусть K выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $D: K \to 2^K$ полунепрерывно сверху, $\forall x \in K$ $D(x)$ непустое, выпуклое, замкнутое множество. Тогда $\exists \hat{x} \in K$ такой, что $\hat{x} \in D(\hat{x})$.

Решение

Определим полунепрерывное сверху отображение $f : X \times Y \to 2^{X \times Y}, f(x, y) = N_y \times M_x$.

По теореме Какутани

$$\exists \left(x^*, y^*\right) \in X \times Y \ \left(x^*, y^*\right) \in N_{y^*} \times M_{x^*}.$$

Заметим, что

$$x^* \in N_{y^*} \Leftrightarrow \left(x^*, y^*\right) \in N, \ y^* \in M_{x^*} \Leftrightarrow \left(x^*, y^*\right) \in M.$$

Следовательно, $\left(x^*, y^*\right) \in M \bigcap N.$

Задача 15 (неравенство Адамара)

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$ комплексная $m \times n$ матрица.

Доказать, что

$$\det\left(AA^*\right) \le \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2.$$

Решение

Матрица $H = \left(h_{ij}\right) = AA^*$ эрмитова, неотрицательно определенная $(m \times m)$ матрица.

Её диагональные элементы равны

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2, \; i = 1, \ldots, m.$$

Эрмитову матрицу H можно с помощью унитарной матрицы $U = \left(u_{ij}\right), UU^* = U^*U = E$ можно привести к диагональному виду

$$D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) \geq 0, H = UDU^*.$$

Решение

Откуда получаем, что

$$h_{ii} = \sum_{k=1}^{m} u_{ik}\lambda_k \bar{u}_{ik},\ i = 1, \ldots, m.$$

Положим $p_{ik} = \left|u_{ik}\right|^2,\ i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, m.$

Тогда $UU^* = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} p_{ik} = 1, i = 1, \ldots, m.$

Поскольку

$$h_{ii} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\lambda_k, i = 1, \ldots, m,$$

по теореме мажоризации получаем, что

$$-\sum_{i=1}^{m} \ln h_{ii} \le -\sum_{i=1}^{m} \ln \lambda_i .$$

Решение

Таким образом,

$$\prod_{i=1}^{m} h_{ii} \geq \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \Rightarrow \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 \geq = \det AA^*.$$