Введение в эргодическую теории
Лекция 4

А.А.Шананин

Пример: распределение первых цифр в десятичной записи 2^n

2,4,8,1,3,6, …

Число в десятичной записи имеет вид

$$2^n = k_0 10^r + k_1 10^{r-1} + \ldots,\ \text{где } 0 < k_0 \le 9; 0 \le k_1 \le 9;$$

$$\Rightarrow k_0 10^r \le 2^n < \left(k_0 + 1\right)10^r \Rightarrow r + \lg k_0 \le n \lg 2 < r + \lg\left(k_0 + 1\right),$$

$$\Rightarrow \lg k_0 \le \left\{n \lg 2\right\} < \lg\left(k_0 + 1\right).$$

Число $\lg 2 = \log_{10} 2$ иррациональное. Обозначим

$$\Delta_k = \left[\log_{10} k, \log_{10}\left(k+1\right)\right), k = 1, \ldots, 9.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\Delta_k}\left(\left\{j \log_{10} 2\right\}\right) = \lambda\left(\Delta_k\right) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Эргодичность динамической системы в непрерывном времени

Определение. Абстрактная динамическая система в непрерывном времени $\left\{M, \Sigma, T^t, \mu\right\}$ называется эргодической, если $\forall f(x) \in L_1(M, \mu)$ для п.в. (по мере μ) $x \in M$ справедливо, что

$$f^*(x) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \int_0^N f\left(T^t x\right) dt = \int_M f(x) \mu(dx).$$

Пример

Динамическая система сдвиг на торе в непрерывном времени $\left\{ R^n / Z^n, \Lambda, T_g^t, \lambda \right\}, g = \left(g_1, \ldots, g_n \right) \in R^n,$

где

$$T_g^t = \Psi \Xi_g^t \Psi^{-1} : R^n / Z^n \to R^n / Z^n ,$$

$$\Xi_g^t \left(x_1, \ldots, x_n \right) = \left(x_1 + tg_1, \ldots, x_n + tg_n \right),$$

$$T_g^t \left(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n} \right) = \left(e^{2\pi i \left(x_1 + tg_1 \right)}, \ldots, e^{2\pi i \left(x_n + tg_n \right)} \right).$$

Теорема

Динамическая система сдвиг на торе $\left\{R^n/Z^n, \Lambda, T_g^t, \lambda\right\}$ является эргодической тогда и только тогда, когда числа $g_1, \ldots, g_n$ рационально независимы, т.е.

$$r_1 g_1 + r_2 g_2 + \ldots + r_n g_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 \ldots = r_n = 0.$$

Доказательство

Достаточность. Функция $f^*(x) \in L_1(R^n/Z^n)$ и п.в. (по мере μ) $f^*(T_g^t x) = f^*(x)$. Без ограничения общности можно считать, что $f^*(x) \in L_\infty(R^n/Z^n)$. Разложим функцию $f^*(x)$ в ряд Фурье сходящийся в $L_2(R^n/Z^n)$

$$f^*(x) = \sum_{r \in Z^n} c_r e^{2\pi i (r,x)}, \text{ где } c_r = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f^*(x) e^{-2\pi i (r,x)} dx_1 \ldots dx_n .$$

Доказательство

Тогда

$$f^*\left(T_g^t x\right)=\sum_{r\in Z^n} c_r e^{2\pi i\left(r,x+tg\right)}=\sum_{r\in Z^n} c_r e^{2\pi it\left(r,g\right)} e^{2\pi i\left(r,x\right)} \Rightarrow \forall r\in Z^n \forall t\geq 0\ c_r = c_r e^{2\pi it\left(r,g\right)}.$$

Следовательно, $c_r = 0$ при $r\in Z^n \setminus \{0\} \Rightarrow f^*\left(x\right)=c_0$ п.в.

Из

$$\int_{R^n/Z^n} f^*\left(x\right)dx=\int_{R^n/Z^n} f\left(x\right)dx$$

получаем, что

$$f^*\left(x\right)=\int_{R^n/Z^n} f\left(x\right)dx.$$

Доказательство

Необходимость. Допустим противное, что

$$r_1 g_1 + \ldots + r_n g_n = 0, r = (r_1, \ldots, r_n) \in Z^n \setminus \{0\}.$$

Положим $\tilde{f}(x) = e^{2\pi i (r,x)}$. Тогда

$$\tilde{f}^*(x) = \tilde{f}(x), \int\limits_{R^n/Z^n} \tilde{f}(x) dx = 0 \Rightarrow \tilde{f}^*(x) \neq \int\limits_{R^n/Z^n} \tilde{f}(x) dx.$$

Динамическая система не является эргодической.

Задача Лагранжа о среднем движении

Пусть $z(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{2\pi i g_j t} \neq 0, a_j = |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \in C, g_j \in R, j = 1, \dots, n.$

Предположим, что $g_1, \dots, g_n$ рационально независимы. Справедливо представление

$$z(t) = r(t) e^{2\pi i \varphi(t)}.$$

Вопрос Лагранжа: существует ли предел

$$\omega = \lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} ?$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Заметим, что

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln} z(t).$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i\, z(t)}\frac{dz(t)}{dt}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j a_j e^{2\pi i g_j t}}{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{2\pi i g_j t}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j \left|a_j\right| e^{2\pi i\left(g_j t+\psi_j\right)}}{\sum_{j=1}^{n} \left|a_j\right| e^{2\pi i\left(g_j t+\psi_j\right)}}\right).$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Рассмотрим функцию на R^n / Z^n

$$f(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j |a_j| e^{2\pi i \psi_j}}{\sum_{j=1}^{n} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right).$$

Тогда

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\psi_1 + g_1 t, \ldots, \psi_n + g_n t) \Rightarrow \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\psi_1 + g_1\tau, \ldots, \psi_n + g_n\tau)\, d\tau.$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\left(\psi_1+g_1\tau,\dots,\psi_n+g_n\tau\right)d\tau.$$

Сдвиг на торе T_g эргодическая система

$$\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\int_0^1\dots\int_0^1 f\left(\psi_1,\dots,\psi_n\right)d\psi_1\dots d\psi_n=$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^1\dots\int_0^1\left(\frac{\sum_{j=1}^n g_j\left|a_j\right|e^{2\pi i\psi_j}}{\sum_{j=1}^n\left|a_j\right|e^{2\pi i\psi_j}}\right)d\psi_1\dots d\psi_n=\sum_{j=1}^n g_jW_j.$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Здесь

$$W_k = \mathrm{Re}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\frac{|a_k| e^{2\pi i \psi_k}}{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right) d\psi_1 \ldots d\psi_n =$$

$$= \mathrm{Re}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{|a_k| e^{2\pi i \psi_k}}{|a_k| e^{2\pi i \psi_k} + \sum\limits_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right) d\psi_k \right) d\psi_1 \ldots d\psi_{k-1} d\psi_{k+1} \ldots d\psi_n .$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Заметим, что

$$\int_0^1 \left(\frac{|a_k| e^{2\pi i \psi_k}}{|a_k| e^{2\pi i \psi_k} + \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right) d\psi_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z_k| = |a_k|} \frac{dz_k}{z_k + \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{если} \left| \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \right| < |a_k|, \\ 0, \text{если} \left| \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \right| > |a_k|. \end{cases}$$

Следовательно, $W_k = P\left\{ (\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n) \,\middle|\, \left| \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \right| < |a_k| \right\}.$

Перемешивание

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M)=1$ является системой с перемешиванием, если

$$\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma \lim_{j \to +\infty} \mu\left(T^{-j}A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B).$$

P.S. Система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M)=1$ эргодическая, если $\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\left(T^{-j}A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B).$

Связь перемешивания с эргодичностью

Динамическая система с перемешиванием является эргодической.

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma, T^{-1}A = A, B = M \setminus A.$

Тогда

$$T^{-j}A \cap B = \varnothing, j = 0,1,\ldots \Rightarrow \mu\left(T^{-j}A \cap B\right) = 0 \Rightarrow \mu(A)\mu(B) = 0.$$

Следовательно, $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1.$

Пример «сдвиг на торе»

Сдвиг на торе не является перемешиванием. Доказательство. Если $g_1,...,g_n,1$ не являются рационально независимыми, то сдвиг на торе $\left\{R^n/Z^n, \Lambda, T_g, \lambda\right\}$ по теореме Вейля-фон Неймана не является эргодическим и, значит, не является перемешиванием. Предположим, теперь, что $g_1,...,g_n,1$ рационально независимы.

Пример «сдвиг на торе»

Выберем $f(x) = e^{2\pi i(r,x)}, g(x) = e^{-2\pi i(r,x)}, r \in Z^n \setminus \{0\}.$

Тогда

$$\int_{R^n/Z^n} f(x)dx_1...dx_n = 0, \int_{R^n/Z^n} g(x)dx_1...dx_n = 0,$$

$$\int_{R^n/Z^n} f\left(T_g^m x\right)g(x)dx_1...dx_n = e^{2\pi im(r,g)},$$

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{R^n/Z^n} f\left(T_g^m x\right)g(x)dx_1...dx_n \neq 0.$$

Критерий перемешивания

Определение. Совокупность измеримых множеств $\Upsilon \subseteq \Sigma$ называется плотной, если

$$\forall A \in \Sigma, \forall \varepsilon > 0 \ \exists A^* \in \Upsilon : \mu\left(A \vartriangle A^*\right) < \varepsilon.$$

Совокупность измеримых множеств $\Gamma \subseteq \Sigma$ называется достаточной, если конечные объединения непересекающихся элементов из Γ образуют плотную систему.

Критерий перемешивания

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система и $\Gamma \subseteq \Sigma$ достаточная совокупность измеримых множеств. Если

$$\forall A \in \Gamma, \forall B \in \Gamma \lim_{j \to +\infty} \mu\left(T^{-j} A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B),$$

то $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ динамическая система с перемешиванием.

Доказательство

Пусть $A_1 \in \Gamma, \dots, A_k \in \Gamma, B_1 \in \Gamma, \dots, B_m \in \Gamma,$

$A_i \cap A_j = \varnothing, B_i \cap B_j = \varnothing$ для $i \neq j,$

$$A' = \bigcup_{i=1}^{k} A_i, B' = \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

Тогда

$$\mu(A') = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i), \mu(B') = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j), \mu\left(T^{-n}A' \cap B'\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \mu\left(T^{-n}A_i \cap B_j\right).$$

По условию

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(T^{-n}A_i \cap B_j\right) = \mu(A_i)\mu(B_j), i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m.$$

Доказательство

Следовательно,

$$\forall A' \in \Upsilon, \forall B' \in \Upsilon \lim_{n\to+\infty} \mu\left(T^{-n}A' \cap B'\right) = \mu(A')\mu(B'),$$

где Υ плотная совокупность измеримых множеств. Пусть теперь $\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma, \forall \varepsilon > 0.$

Найдем $A' \in \Upsilon, B' \in \Upsilon : \mu(A \vartriangle A') < \dfrac{\varepsilon}{4}, \mu(B \vartriangle B') < \dfrac{\varepsilon}{4}.$

Тогда

$$\left|\mu\left(T^{-n}A \cap B\right) - \mu(A)\mu(B)\right| \le \mu\left(T^{-n}(A \vartriangle A')\right) + \mu\left(T^{-n}A' \cap (B \vartriangle B')\right) +$$

$$+\left|\mu\left(T^{-n}A' \cap B'\right) - \mu(A')\mu(B')\right| + \mu(A)\mu(B \vartriangle B') + \mu(B')\mu(A \vartriangle A') \le$$

$$\le \left|\mu\left(T^{-n}A' \cap B'\right) - \mu(A')\mu(B')\right| + \varepsilon.$$

Символическая динамика

Обозначим

$$\Omega_N = \left\{ \omega = \left(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots \right) \middle| \omega_i \in \left\{ 0, 1, \ldots, N-1 \right\} \text{ для } i \in Z \right\}$$

фазовое пространство. Пусть

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \left\{ 0, 1, \ldots, N-1 \right\}.$$

Цилиндром k-го порядка называется множество $C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \left\{ \omega \in \Omega_N \middle| \omega_{n_i} = \alpha_i \text{ для } i = 1, \ldots, k \right\}.$

Обозначим Π_N наименьшую σ - алгебру, содержащую все цилиндры.

Символическая динамика

Определим отображение сдвига

$$\sigma_N : \Omega_N \to \Omega_N, \sigma_N(\omega) = \omega', \forall n \in Z \ \omega'_n = \omega_{n+1},$$

$$\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots), \omega' = (\ldots, \omega'_{-1}, \omega'_0, \omega'_1, \ldots).$$

Мера μ_N инвариантна, если для любого

цилиндра $C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ справедливо, что

$$\mu_N\left(\sigma_N^{-1}\left(C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right)\right) = \mu_N\left(C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right) \Leftrightarrow \mu_N\left(C^{n_1+1,\ldots,n_k+1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right) = \mu_N\left(C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right).$$

Символическая динамическая система

$$\{\Omega_N, \Pi_N, \sigma_N, \mu_N\}, \mu_N(\Omega_N) = 1.$$

Моделирование динамической системы

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ абстрактная динамическая система, $T : M \to M$ автоморфизм. Набор подмножеств M $\xi = \{A_0, \dots, A_{N-1}\}$ называется разбиением M, если $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ при $i \neq j,$ $\mu\left(M \setminus \bigcup_{j=0}^{N-1} A_j\right) = 0.$

Положим $\varphi : M \to \Omega_N, \varphi(x) = (\dots\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots),$

$$\forall n \in Z \ \omega_n = j \Leftrightarrow T^n x \in A_j.$$

Тогда для п.в. (мере μ) $x \in M \ \ \varphi(Tx) = \sigma_N(\varphi(x)),$

$$\mu_N\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} T^{-n_j} A_{\alpha_j}\right).$$

К-системы

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ где Т автоморфизм, называется К-системой, если существует подалгебра $\Re \subset \Sigma$,такая, что 1. $\Re \subset T\Re$,

2. $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} T^n \Re = \{M, \varnothing\},$ 3. $\overline{\bigvee\limits_{n=\infty}^{+\infty} T^n \Re} = \Sigma,$ здесь $\overline{\bigvee\limits_{n=\infty}^{+\infty} T^n \Re}$ минимальная б - алгебра, такая, что

$$\forall k \in Z \;\; T^k \Re \subset \overline{\bigvee_{n=\infty}^{+\infty} T^n \Re}.$$

Сдвиг Бернулли $B(p_0,\ldots,p_{N-1})$

Пусть $p_0 > 0,\ldots,p_{N-1} > 0, \sum_{j=0}^{N-1} p_j = 1.$

Если для любого цилиндра $C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}$ выполнятся

$\mu_N\left(C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}^{n_1,\ldots,n_k}\right) = p_{\alpha_1}\ldots p_{\alpha_k},$ то символическая система

$\{\Omega_N,\Pi_N,\sigma_N,\mu_N\}, \mu_N(\Omega_N)=1$ называется сдвигом

Бернулли $B(p_0,\ldots,p_{N-1})$.

Предложение. Сдвиг Бернулли $B(p_0,\ldots,p_{N-1})$ является перемешиванием.

Доказательство

Рассмотрим два произвольных цилиндра

$$C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}, C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}.$$

Заметим, что для достаточно больших j>0

$$\sigma_N^{-j}\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right) = C^{n_1+j,\dots,n_k+j}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}, C^{n_1+j,\dots,n_k+j}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \cap C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t} = C^{m_1,\dots,m_t,n_1+j,\dots,n_k+j}_{\beta_1,\dots,\beta_t,\alpha_1,\dots,\alpha_k}.$$

Тогда

$$\mu_N\left(\sigma_N^{-j}\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right) \cap C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}\right) = \mu_N\left(C^{m_1,\dots,m_t,n_1+j,\dots,n_k+j}_{\beta_1,\dots,\beta_t,\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right) =$$

$$= p_{\beta_1}\dots p_{\beta_t} p_{\alpha_1}\dots p_{\alpha_k} = \mu_N\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right)\mu_N\left(C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}\right).$$

Задача

Доказать, что схема Бернулли является К-системой.

Критерий перемешивания

Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ является перемешиванием тогда и только тогда, когда

$$\forall f(x) \in L_2(M, \mu), \forall g(x) \in L_2(M, \mu)$$

справедливо, что

$$\lim_{j \to +\infty} \int_M f(T^j x) g(x) \mu(dx) = \int_M f(x) \mu(dx) \int_M g(x) \mu(dx).$$

P.S. Критерий эргодичности

Система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ является эргодической, если и только если $\forall f(x) \in L_2(M, \mu), \forall g(x) \in L_2(M, \mu)$ справедливо

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_M f\left(T^j x\right) g(x) \mu(dx) = \int_M f(x) \mu(dx) \int_M g(x) \mu(dx).$$

Доказательство критерия перемешивания

Достаточность. Полагая $f(x)=\chi_A(x), g(x)=\chi_B(x)$,

получаем, что

$$\int_M f(T^j x)g(x)\mu(dx)=\int_M \chi_{T^{-j}A}(x)\chi_B(x)\mu(dx)=\mu(T^{-j}A\cap B),$$

$$\int_M f(x)\mu(dx)=\int_M \chi_A(x)\mu(dx)=\mu(A),\int_M g(x)\mu(dx)=\int_M \chi_B(x)\mu(dx)=\mu(B).$$

Откуда $\lim\limits_{j\to+\infty}\mu(T^{-j}A\cap B)=\mu(A)\mu(B).$

Доказательство критерия перемешивания

Необходимость. Из определения перемешивания следует, что соотношение

$$\lim_{j\to+\infty}\int_M f\left(T^j x\right)g(x)\mu(dx)=\int_M f(x)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx)$$

выполняется для простых функций, а, значит, в силу его билинейности по $f(x)$ и $g(x)$ выполняется для простых функций. Пусть $\forall\varepsilon>0$. Для произвольных $f(x)\in L_2(M,\mu), g(x)\in L_2(M,\mu)$ выберем простые функции $\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)$ так, чтобы

$$\left\|f(x)-\tilde{f}(x)\right\|_{L_2(M,\mu)}<\varepsilon, \left\|g(x)-\tilde{g}(x)\right\|_{L_2(M,\mu)}<\varepsilon.$$

Доказательство критерия перемешивания

Тогда

$$\left|\int_M f\left(T^j x\right) g(x)\mu(dx) - \int_M f(x)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx)\right| \le \left|\int_M f\left(T^j x\right)\left(g(x)-\tilde{g}(x)\right)\mu(dx)\right| +$$

$$+\left|\int_M \left(f\left(T^j x\right)-\tilde{f}\left(T^j x\right)\right)\tilde{g}(x)\mu(dx)\right| + \left|\int_M \tilde{f}\left(T^j x\right)\tilde{g}(x)\mu(dx) - \int_M \tilde{f}(x)\mu(dx)\int_M \tilde{g}(x)\mu(dx)\right| +$$

$$+\left|\int_M \tilde{f}(x)\mu(dx)\int_M \left(\tilde{g}(x)-g(x)\right)\mu(dx)\right| + \left|\int_M \left(\tilde{f}(x)-f(x)\right)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx)\right| \le$$

$$\left|\int_M \tilde{f}\left(T^j x\right)\tilde{g}(x)\mu(dx) - \int_M \tilde{f}(x)\mu(dx)\int_M \tilde{g}(x)\mu(dx)\right| + \varepsilon\left(\left\|f(x)\right\| + \left\|\tilde{g}(x)\right\| + \left\|\tilde{f}(x)\right\| + \left\|g(x)\right\|\right).$$

Усиление критерия перемешивания

Пусть Φ полная система функций в $L_2(M,\mu)$

Абстрактная динамическая система $\{M,\Sigma,T,\mu\},\mu(M)=1$ является перемешиванием тогда и только тогда, когда $\forall f(x)\in\Phi,\forall g(x)\in\Phi$ справедливо, что

$$\lim_{j\to+\infty}\int_M f\left(T^j x\right)g(x)\mu(dx)=\int_M f(x)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx).$$

Лебеговские спектры

Определение. Будем говорить, что $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система обладает лебеговским спектром, если в $L_2(M, \mu)$ существует полный ортонормированный базис , образованный функцией $f_0(x) \equiv 1$ и функциями $\left\{f_{i,j}(x) \middle| i \in I, j \in Z\right\}$ такими, что

$$\forall i \in I, \forall j \in Z \;\; U_T f_{i,j}(x) = f_{i,j}(Tx) = f_{i,j+1}(x).$$

Здесь I конечное или счетное множество.

Лебеговские спектры

Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ обладающая лебеговским спектром является перемешивающей системой.

Доказательство. Достаточно проверить усиленный критерий для $f = f_{i,j}, g = f_{k,r}.$

Имеем $\left(U_T^n f, g\right) = \left(f_{i,j+n}, f_{k,r}\right) = 0$ при $j + n \neq r.$

Задача

На окружности $S = \left\{ z \in C \middle\| z \right| = 1 \}$ задано отображение $T : S \to S, Tz = z^2.$ Доказать, что

1. мера Лебега индуцирует инвариантную меру для отображения T;
2. динамическая система $\{S, \Lambda, \lambda, T\}$ является перемешиванием.