Введение в эргодическую теорию
Лекция 10

А.А.Шананин

Свойства энтропии динамической системы

1. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$h\left(T^k\right) = k\ h\left(T\right).$$

Динамическая система в непрерывном времени

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, S^t, \mu\}$ называется непрерывной, если $\forall A \in \Sigma \ \lim\limits_{t \to 0} \mu\left(S^t A \triangle A\right) = 0.$

Следствие. Если $\{M, \Sigma, S^t, \mu\}$ непрерывная динамическая система с $t \in (-\infty, +\infty)$, то

$$h\left(S^t\right) = |t|\, h\left(S^1\right).$$

Свойства энтропии динамической системы

2. Если A инвариантное множество абстрактной динамической системы $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M)=1,$ и $\mu(A)>0,$ то

$$h_{\mu}(T)=\mu(A)h_{\mu_A}(T)+\mu(M\setminus A)h_{\mu_{M\setminus A}}(T).$$

Следствие. Если μ и λ две взаимно сингулярные инвариантные вероятностные меры преобразования T и $p\in[0,1],$ то

$$h_{p\mu+(1-p)\lambda}(T)=ph_{\mu}(T)+(1-p)h_{\lambda}(T).$$

Свойства энтропии динамической системы

3. Если μ и λ две инвариантные вероятностные меры для преобразования T, то для любого $p \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$h_{p\mu+(1-p)\lambda}(T) \geq p h_{\mu}(T) + (1-p) h_{\lambda}(T)$$

Доказательство следует из свойства 6 энтропии преобразования относительно разбиения.

Свойства энтропии динамической системы

4. Пусть $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}, \mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) = 1$ две абстрактные динамические системы и абстрактная динамическая система их прямое произведение $\{M_1 \times M_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, T_1 \times T_2, \mu_1 \times \mu_2\}$,

$T_1 \times T_2 : M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_2, T_1 \times T_2(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2 x_2)$

Тогда

$$h_{\mu_1 \times \mu_2}(T \times S) = h_{\mu_1}(T) + h_{\mu_2}(S).$$

Доказательство

Пусть ξ разбиение M_1 и η разбиение M_2,

$\varsigma_1 = \{\mathrm{M}_1\}, \varsigma_2 = \{\mathrm{M}_2\}$ тривиальные разбиения.

Разбиения $\xi \times \varsigma_2, \varsigma_1 \times \eta$ являются независимыми разбиениями $\mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2$, поэтому в силу свойств 2 и 4 энтропии разбиения имеем, что

$$\xi \times \eta = (\xi \times \varsigma_2) \vee (\varsigma_1 \times \eta) \Rightarrow$$

$$\mathrm{H}_{\mu_1 \times \mu_2}(\xi \times \eta) = \mathrm{H}_{\mu_1 \times \mu_2}(\xi \times \varsigma_2) + \mathrm{H}_{\mu_1 \times \mu_2}(\varsigma_1 \times \eta) = \mathrm{H}_{\mu_1}(\xi) + \mathrm{H}_{\mu_2}(\eta).$$

Доказательство

Поскольку $\left(\xi\times\eta\right)_{-n}^{T_1\times T_2}=\xi_{-n}^{T_1}\times\eta_{-n}^{T_2}$, имеем, что

$$h_{\mu_1\times\mu_2}\left(T_1\times T_2,\xi\times\eta\right)=h_{\mu_1}\left(T_1,\xi\right)+h_2\left(T_2,\eta\right).$$

Семейство разбиений

$$\left\{\xi\times\eta\,\middle|\,H_{\mu_1}\left(\xi\right)<+\infty,H_{\mu_2}\left(\eta\right)<+\infty\right\}$$

является достаточным семейством разбиений.

Следовательно,

$$h_{\mu_1\times\mu_2}\left(T\times S\right)=h_{\mu_1}\left(T\right)+h_{\mu_2}\left(S\right).$$

Фактор-система

Определение. Будем говорить, что абстрактная динамическая система $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \mu_1(M_1) = 1,$ является фактор – системой $\{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}, \mu_2(M_2) = 1,$ если существует сохраняющее меру отображение $R : M_2 \to M_1,$ такое, что $R \circ T_2 = T_1 \circ R$

Свойства энтропии динамической системы

5. Если абстрактная динамическая система $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \mu_1(M_1) = 1$, является фактор – системой $\{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}, \mu_2(M_2) = 1$, то

$$h_{\mu_1}(T_1) \leq h_{\mu_2}(T_2).$$

Доказательство

Для любого разбиения ξ пространства M_1 $R^{-1}(\xi)$ является разбиением пространства M_2.

Поскольку отображение R сохраняет меру,

$$H_{\mu_2}\left(R^{-1}(\xi)\right) = H_{\mu_1}(\xi), h_{\mu_2}\left(T_2, R^{-1}(\xi)\right) = h_{\mu_1}(T_1, \xi).$$

Тогда $h_{\mu_1}(T_1) = \sup\left\{h_{\mu_1}(T_1,\xi) \middle| H_{\mu_1}(\xi) < +\infty\right\} =$

$$= \sup\left\{h_{\mu_2}\left(T_2, R^{-1}(\xi)\right) \middle| H_{\mu_2}\left(R^{-1}(\xi) < +\infty\right)\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{h_{\mu_2}(T_2, \eta) \middle| H_{\mu_2}(\eta) < +\infty\right\} = h_{\mu_2}(T_2).$$

Задача

Пусть $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle\|\, |z| = 1 \right\}, E_k : S \to S, E_k(z) = z^k, k \in \mathbb{N}.$

Вычислить энтропию динамической системы $\left\{ S, \Lambda, E_k, \lambda \right\}.$

Динамическая система E_k

Рассмотрим разбиение

$$\xi = \left\{A_0, \ldots, A_{k-1}\right\}, A_m = \left\{ e^{2\pi i x} \left| \frac{m}{k} \le x < \frac{m+1}{k} \right.\right\} \; m = 0, \ldots, k-1.$$

Заметим, что

$$E_k^{-n}\xi = \left\{B_0, \ldots, B_{k^{n+1}-1}\right\}, A_m = \left\{ e^{2\pi i x} \left| \frac{m}{k^{n+1}} \le x < \frac{m+1}{k^{n+1}} \right.\right\} \; m = 0, \ldots, k^{n+1}-1.$$

Разбиение ξ образующее. Следовательно,

$$h\left(E_k\right) = \log_2 k.$$

Изоморфизм с односторонним сдвигом Бернулли

Пусть $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega_k, \omega_n \in \{0, \ldots, k-1\}.$

Положим $\varphi(\omega) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_k^{-n} A_{\omega_n}.$ Поскольку

$\mu\left(\bigcap_{m=0}^{n} E_k^{-m} A_{\omega_m}\right) = \frac{1}{k^{n+1}},$ множество $\varphi(\omega)$ состоит из единственной точки $x = 0,\omega_0\omega_1\ldots\omega_n\ldots$записанной в k-ой системе исчисления.

Линейный автоморфизм тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \pm 1, a_{11} + a_{22} > 2.$

Отображение $A : R^2 \to R^2, A(x) = Ax$ при условии, что $a_{ij} \in Z\ i = 1, 2;\ j = 1, 2$ допускает факторизацию

$$T_A = \Psi \circ A \circ \Psi^{-1} : R^2 / Z^2 \to R^2 / Z^2.$$

Абстрактная динамическая система $\{R^2/Z^2, \Lambda, T_A, \lambda\}$ называется линейным автоморфизмом тора.

Марковские разбиения

Определение. Разбиение $\xi = \left\{ A_1, ..., A_m \right\}$ называется марковским, если

M топологическое пространство и

$$A_i \cap A_j = \partial A_i \cap \partial A_j, \text{ если } i \neq j;$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \partial A_j = \gamma^u(\xi) \cup \gamma^s(\xi),$$

$$T_A^{-1}\left(\gamma^s(\xi)\right) \subset \gamma^s(\xi), T_A\left(\gamma^u(\xi)\right) \subset \gamma^u(\xi).$$

Марковские разбиения

Обозначим через $l^s(A_j)$ длину устойчивой границы $\gamma^s(A_j)$ параллелограмма A_j,
а через $l^u(A_j)$ длину неустойчивой границы $\gamma^u(A_j)$ параллелограмма A_j.

Предложение 1. *Если ξ марковское разбиение линейного автоморфизма тора, то λ марковская мера.*

Доказательство предложения 1

У параллелограммов $T_A A_j \cap A_i$ и A_i одинаковая длина устойчивой границы, а длины неустойчивых границ соответственно $|\lambda_2| l^u(A_j)$ и $l^u(A_i)$. Поэтому

$$\frac{\lambda(T_A A_j \cap A_i)}{\lambda(A_i)} = \frac{|\lambda_2| l^u(A_j)}{l^u(A_i)}.$$

Доказательство предложения 1

Из определения марковского разбиения

разбиения следует, что у параллелограмма

A_i и параллелограмма $A_i \cap T_A^{-1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T_A^{-n} A_{i_n}$

одинаковая длина неустойчивой границы.

Поэтому

$$\frac{\lambda\left(T_A A_j \cap A_i \cap T_A^{-1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T_A^{-n} A_{i_n}\right)}{\lambda\left(A_i \cap T_A^{-1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T_A^{-n} A_{i_n}\right)} = \frac{|\lambda_2| l^u\left(A_j\right)}{l^u\left(A_i\right)} = \frac{\lambda\left(T_A A_j \cap A_i\right)}{\lambda\left(A_i\right)}.$$

Энтропия марковской системы

Неотрицательная матрица переходных вероятностей $\left\|\pi_{ij}\right\|_{i,j=0,\dots,N-1}$ является стохастической, т.е. $\sum_{i=1}^{N}\pi_{ij}=1\ j=1,\dots,N,$ а вектор

$$p=\left(p_0,\dots,p_{N-1}\right), p_j=\mu_N\left(C_j^0\right), j=0,\dots,N-1,$$

её вектором Фробениуса – Перрона. В силу предложения 1 энтропия марковской системы равна

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to+\infty}H\left(\xi\middle|T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right)=H\left(\xi\middle|T^{-1}(\xi)\right)=$$

$$=-\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}p_j\pi_{ij}\log_2\pi_{ij}$$

Энтропия линейного автоморфизма тора

Предложение 2. *Энтропия динамической системы линейный автоморфизм тора равна*

$$h\left(T_A\right)=\log_2\left|\lambda_1\right|.$$

Доказательство. Марковское разбиение ξ является образующим. Имеем

$$h\left(T_A\right)=-\sum_{i=1}^{m}\lambda\left(A_i\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda\left(A_i\cap T_A{}^{-1}A_j\right)}{\lambda\left(A_i\right)}\log_2\left(\frac{\lambda\left(A_i\cap T_A{}^{-1}A_j\right)}{\lambda\left(A_i\right)}\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda\left(A_i\cap T_A{}^{-1}A_j\right)\left(\log_2\lambda\left(A_i\cap T_A{}^{-1}A_j\right)-\log_2\lambda\left(A_i\right)\right).$$

Энтропия линейного автоморфизма тора

Из свойства марковского разбиения следует

$$\lambda\left(A_i \cap T_A^{-1} A_j\right) = \lambda\left(A_i\right) \frac{|\lambda_2| l^s\left(A_j\right)}{l^s\left(A_i\right)}.$$

Откуда

$$h\left(T_A\right) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda\left(A_i \cap T_A^{-1} A_j\right)\left(\log_2|\lambda_2| + \log_2 l^s\left(A_j\right) - \log_2 l^s\left(A_i\right)\right) =$$

$$= -\log_2|\lambda_2| - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda\left(A_i \cap T_A^{-1} A_j\right)\log_2 l^s\left(A_j\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda\left(A_i \cap T_A^{-1} A_j\right)\log_2 l^s\left(A_i\right) =$$

$$= -\log_2|\lambda_2| = \log_2|\lambda_1|.$$

Теорема Бреймана

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$, эргодическая динамическая система и $\xi = \{A_1, \ldots, A_m\}$ конечное разбиение M, причем $\mu(A_j) > 0,\ j = 1, \ldots, m.$ Обозначим через

$$\xi_n(x) \in \xi_{-n}^T, \quad x \in \xi_n(x).$$

Тогда для п.в. по мере μ $x \in M$ справедливо

$$\lim_{n \to +\infty}\left(-\frac{1}{n}\log_2 \mu(\xi_n(x))\right) = h(T, \xi).$$

Доказательство

Заметим, что

$$h\left(T,\xi\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}\int_M \log_2 \mu\left(\xi_n\left(x\right)\right)\mu\left(dx\right).$$

Обозначим $\forall A\in\Sigma,\forall B\in\Sigma\quad \mu\left(A\middle|B\right)=\dfrac{\mu\left(A\cap B\right)}{\mu\left(B\right)}$.

Справедливо равенство

$$\mu\left(\xi_n\left(x\right)\right)=\mu\left(\xi_1\left(x\right)\middle|\xi_{n-1}\left(Tx\right)\right)\mu\left(\xi_1\left(Tx\right)\middle|\xi_{n-2}\left(T^2x\right)\right)\ldots\mu\left(\xi_1\left(T^{n-1}x\right)\right).$$

Доказательство

Обозначим

$$g_m(x) = -\log_2 \mu\left(\xi_1(x) \middle| \xi_m(Tx)\right).$$

Тогда

$$-\log_2 \mu\left(\xi_n(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} g_{n-k}\left(T^k x\right).$$

Обозначим

$$\xi^- = \bigvee_{k=0}^{+\infty} T^{-k}\xi, g(x) = -\log_2 \mu\left(\xi_1(x) \middle| \xi^-(Tx)\right).$$

Доказательство

По теореме Дуба о сходимости условных вероятностей для почти всех по мере μ $x \in M$

$$\forall A_j \in \xi \lim_{n \to +\infty} \mu\left(A_j \middle| \xi_n(x)\right) = \mu\left(A_j \middle| \xi^-(x)\right).$$

Откуда следует, что для почти всех по мере μ

$$x \in M \quad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g(x) \in L_1(M, \mu),$$

$$h(T, \xi) = \int_M g(x)\, \mu(dx).$$

Доказательство

Имеем, что

$$-\frac{1}{n}\log_2 \mu\left(\xi_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(T^k x\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(g_{n-k}\left(T^k x\right) - g\left(T^k x\right)\right).$$

По теореме Биркгофа – Хинчина с учётом эргодичности для почти всех по мере μ $x \in M$ справедливо, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(T^k x\right) = \int_M g(x)\mu(dx) = h(T,\xi).$$

Доказательство

Таким образом, требуется доказать, что для почти всех по мере μ $x \in M$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right)=0.$$

Обозначим

$$G_N\left(x\right)=\sup_{k\ge N}\left|g_k\left(x\right)-g\left(x\right)\right|.$$

Доказательство

Имеем, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n-N+1}^{n}\left|g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-N}\left|g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{k=n-N+1}^{n}\left|g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-N} G_N\left(T^k x\right).$$

Доказательство

Для фиксированного N справедливо, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n-N+1}^{n}\left|g_{n-k}\left(T^k x\right)-g\left(T^k x\right)\right|=0.$$

По теореме Биркгофа – Хинчина с учётом эргодичности для почти всех по мере μ $x\in M$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}G_N\left(T^k x\right)=\int_M G_N(x)\mu(dx).$$

Доказательство

Поскольку $0 \le G_N(x) \le g(x) + \sup\limits_{k \ge 1} g_k(x)$, если $\sup\limits_{k \ge 1} g_k(x) \in L_1(M,\mu)$, то

$$\lim_{N \to +\infty} \int_M G_N(x)\mu(dx) = \int_M \lim_{N \to +\infty} G_N(x)\mu(dx) = 0.$$

Таким образом, для завершения доказательства теорема достаточно проверить, что

$$\sup_{k \ge 1} g_k(x) \in L_1(M,\mu).$$

Лемма 4.

Справедливо, что

$$\int\limits_{M}\left(\sup_{k\geq 1} g_k(x)\right)\mu(dx) < +\infty.$$

Доказательство леммы 4. Достаточно показать, что существует константа C>0, такая что для всех $\lambda>0$

$$\mu\left\{x \,\middle|\, \sup_{k\geq 1} g_k(x) > \lambda\right\} \leq C2^{-\lambda}.$$

Доказательство леммы 4

Обозначим

$$f_k^i(x) = -\log_2 \mu\left(A_i \middle| \xi_k(Tx)\right),$$

$$E_1 = \left\{x \middle| g_1(x) > \lambda\right\}, E_k = \left\{x \middle| \max_{1\le j<k} g_j(x) \le \lambda, g_k(x) > \lambda\right\}, k \ge 2,$$

$$F_1^i = \left\{x \middle| f_1^i(x) > \lambda\right\}, F_k^i = \left\{x \middle| \max_{1\le j<k} f_j^i(x) \le \lambda, f_k^i(x) > \lambda\right\}, k \ge 2.$$

Имеем

$$\mu(E_k) = \sum_{i=1}^m \mu(E_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^m \mu\left(F_k^i \cap A_i\right).$$

Доказательство леммы 4

По теореме об условной вероятности

$$\mu\left(A_i \cap F_k^i\right) = \int_{F_k^i} \mu\left(A_i \middle| \xi_k(Tx)\right)\mu(x) = \int_{F_k^i} 2^{-f_k^i(x)}\mu(x) \le 2^{-\lambda}\mu\left(F_k^i\right).$$

Если $i \ne j,$ то $F_k^i \cap F_k^j = \varnothing,$ поэтому

$$\mu\left\{x \middle| \sup_{k\ge 1} g_k(x) > \lambda\right\} = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu(E_k) \le \sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu\left(F_k^i\right) \le m2^{-\lambda}.$$