Введение в эргодическую теории
Лекция 3

А.А.Шананин

Определение

Абстрактной динамической системой называется $\{M, \Sigma, T, \mu\}$, где

M фазовое пространство, $\sum$ б- алгебра на М, $T: M \to M$ измеримое отображение, т.е. для любого множества $A \in \Sigma, T^{-1}(A) \in \Sigma$,

μ инвариантная мера для Т, т.е. для любого множества $A \in \Sigma, \mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$.

Теорема Биркофа-Хинчина

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ абстрактная динамическая система, $f(x) \in L_1(M, \mu)$. Тогда для почти всех (по мере μ) $x \in M$ существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) = f^*(x).$$

Теорема Биркгофа-Хинчина

Причем предельная функция $f^*(x)$ интегрируема и инвариантна, т.е.

$f^*(Tx) = f^*(x)$ для почти всех (мере μ) $x \in M$.

Если $\mu(M) < \infty$, то

$$\int_M f^*(x)\mu(dx) = \int_M f(x)\mu(dx).$$

Эргодичность

Пусть $\mu(M)=1.$

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M,\Sigma,T,\mu\},\mu(M)=1$ называется **эргодической**, если для любой функции $f(x)\in L_1(M,\mu)$ её временное среднее равно пространственному среднему, т.е.

$$f^*(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(T^jx\right)=\int_M f(x)\mu(dx)=\overline{f}.$$

Критерии эргодичности

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система. Следующие утверждения эквивалентны:

1. система $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ эргодическая;
2. если множество $A \in \Sigma$ инвариантно, т.е. $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$, то $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$;
3. если $f(x) \in L_1(M, \mu)$ инвариантная функция, т.е. $f(Tx) = f(x)$ п.в. по мере μ, то $f(x) = \mathrm{const}$ п.в.

Критерии эргодичности

4. для любых $A \in \Sigma, B \in \Sigma$ справедливо, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mu\left(T^{-j}A\cap B\right)=\mu(A)\mu(B);$$

5. для любых $f(x)\in L_2(M,\mu), g(x)\in L_2(M,\mu)$

справедливо, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_M f\left(T^j x\right)g(x)\mu(dx)=\int_M f(x)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx).$$

Лемма 5

Если $\mu\left(A \vartriangle T^{-1}A\right)=0, A\in\Sigma,$ то $\exists A_1\in\Sigma:\mu\left(A\vartriangle A_1\right)=0, T^{-1}A_1=A_1.$

Доказательство. Положим $B=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}T^{-k}A.$ Очевидно, что $\mu\left(A\vartriangle B\right)=0, T^{-1}B\supset B, \mu\left(T^{-1}B\setminus B\right)=0.$

Множество $A_1=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}T^{-k}B$ будет искомым.

Действительно, $T^{-1}A_1=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}T^{-k}B=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}T^{-k}B=A_1$, т.к. $T^{-1}B\supset B.$

Очевидно, что $\mu\left(A\vartriangle A_1\right)=0.$

Доказательство критерия эргодичности

$2 \Rightarrow 1.$ Допустим противное, что $f^*(x) \neq \overline{f}$ п.в.

По теореме Биркгофа-Хинчина имеем, что

$$\int_M f^*(x)\mu(dx) = \overline{f}.$$

Значит, $f^*(x)$ не является постоянной, т.е.

$$\exists a : A_1 = \left\{x \in M \middle| f^*(x) < a\right\}, A_2 = \left\{x \in M \middle| f^*(x) \geq a\right\}, \mu(A_1) > 0, \mu(A_2) > 0.$$

Множества A_1 и A_2 инвариантны.

Противоречие с утверждением 2.

Доказательство критерия эргодичности

$3 \Rightarrow 2.$ Пусть $\mu\left(A \vartriangle T^{-1}A\right) = 0.$ В силу леммы 5 $\exists A_1 \in \Sigma : \mu\left(A \vartriangle A_1\right) = 0, T^{-1}A_1 = A_1.$ Пусть

$$\chi_{A_1}(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A_1, \\ 0, \text{если } x \notin A_1, \end{cases}$$

В силу инвариантности A_1 получаем, что

$$\chi_{A_1}(Tx) = \chi_{T^{-1}A_1}(x) = \chi_{A_1}(x) \Rightarrow \chi^*_{A_1}(x) = \chi_{A_1}(x).$$

Из 3 следует, что $\chi^*_{A_1}(x) = \text{const.} \Rightarrow \mu(A_1) = 0$ или $\mu\left(A_1\right) = 1.$

Доказательство критерия эргодичности

$1 \Rightarrow 3$ Если $f(x)$ инвариантна относительно T , то п.в. (по мере) μ $f(Tx) = f(x) \Rightarrow f^*(x) = f(x)$.
Из 1 следует, что $f^*(x) = \overline{f}$ п.в. по мере μ. Тогда $f(x) = \overline{f}$ п.в. по мере μ.

Доказательство критерия эргодичности

$1 \Rightarrow 4$. Из 1 следует, что $\chi_A^*(x) = \int\limits_M \chi_A(x)\mu(dx) = \mu(A)$.

По теореме Биркгофа-Хинчина для п.в. по мере μ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\chi_A(T^j x)\chi_B(x) = \chi_A^*(x)\chi_B(x)$.

По теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_A(T^j x)\chi_B(x)\right)\mu(dx) = \int\limits_M \chi_A^*(x)\chi_B(x)\mu(dx) = \mu(A)\mu(B).$$

Из $\int\limits_M \chi_A(T^j x)\chi_B(x)\mu(dx) = \int\limits_M \chi_{T^{-j}A}(x)\chi_B(x)\mu(dx) = \mu(T^{-j}A\cap B) \Rightarrow 4$.

Доказательство критерия эргодичности

$4 \Rightarrow 2.$ Пусть $A \in \Sigma$ инвариантное множество относительно T. По лемме 5 $\exists A_1 \in \Sigma : \mu(A \triangle A_1) = 0, T^{-1}A_1 = A_1.$

Положим $B = M \setminus A_1.$ Тогда $\mu\left(T^{-j}A_1 \cap B\right) = 0 \;\; j = 0,1,\ldots$

Из 4 получаем

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\left(T^{-j}A_1 \cap B\right) = \mu(A_1)\mu(B).$$

Откуда получаем, что $\mu(A_1) = 0$ или $\mu(B) = 0.$

Следовательно, $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1.$

Доказательство критерия эргодичности

$5 \Rightarrow 2.$ Пусть $A \in \Sigma$ инвариантное относительно Т множество. По лемме 5 $\exists A_1 \in \Sigma : \mu\left(A \vartriangle A_1\right) = 0, T^{-1}A_1 = A_1.$

Положим $f(x) = g(x) = \chi_{A_1}(x)$. Тогда

$$f\left(T^j x\right) g(x) = \chi_{A_1}(x).$$

Откуда в силу 5 получаем, что $\mu(A_1) = \left(\mu(A_1)\right)^2$.

Следовательно, $\mu(A_1) = 0$ или $\mu(A_1) = 1$, а, значит, $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1.$

Доказательство критерия эргодичности

$1 \Rightarrow 5.$ По статистической эргодической теореме Дж. Фон Неймана последовательность

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) \middle| n = 1, 2, \dots \right\}$$

сходится в $L_2(M, \mu)$ к функции $f^*(x)$. Из 1 имеем $f^*(x) = \int_M f(x)\mu(dx)$ п.в. по мере μ. По неравенству Коши-Буняковского

$$\left| \int_M \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) - f^*(x) \right) g(x)\mu(dx) \right| \le \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) - f^*(x) \right\|_{L_2(M,\mu)} \left\| g(x) \right\|_{L_2(M,\mu)}.$$

Доказательство критерия эргодичности

Откуда следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_M f\left(T^j x\right)g(x)\mu(dx)=\int_M f(x)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx).$$

Теорема о всюду плотных траекториях

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ эргодическая абстрактная динамическая система, M топологическое пространство со счётной базой, причём каждое непустое открытое множество имеет положительную меру, T автоморфизм. Тогда для п.в. (по мере μ) $x \in M$ траектория $\left\{T^j x \middle| j \in Z\right\}$ всюду плотна.

Доказательство

Траектория $\left\{T^j x \,\middle|\, j \in Z\right\}$ не плотна тогда и только тогда, когда существует непустое открытое множество G из базы топологии, такое, что $x \in \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} \left(M \setminus T^{-j} G\right)$. Множество $A_G = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} \left(M \setminus T^{-j} G\right)$ является инвариантным $T^{-1} A_G = A_G$. Тогда

$$A_G \cap G = \varnothing, \mu(G) > 0 \Rightarrow \mu(A_G) < 1 \Rightarrow \mu(A_G) = 0.$$

В силу счётности базы имеем $\mu\left(\bigcup_G A_G\right) = 0.$

Тор

Тор размерности n определяется как R^n / Z^n, представляется декартовым произведением n окружностей $\left\{\left(e^{2\pi i x_1},\dots,e^{2\pi i x_n}\right) \middle| x_j \in [0,1], j=1,\dots,n\right\}$.

Каноническая проекция

$$\Psi : R^n \to R^n / Z^n,\ \Psi\left(x_1,\dots,x_n\right)=\left(e^{2\pi i x_1},\dots,e^{2\pi i x_n}\right).$$

Пусть $X=\left(e^{2\pi i x_1},\dots,e^{2\pi i x_n}\right)$ и $Y=\left(e^{2\pi i y_1},\dots,e^{2\pi i y_n}\right)$

Определим расстояние между X и Y как

$$\rho(X,Y)=\inf_{w_1\in Z,\dots,w_n\in Z}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-y_j+w_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Динамическая система «Сдвиг на торе $\{R^n/Z^n, \Lambda, T_g, \lambda\}$»

Сдвиг на вектор $g = (g_1, \ldots, g_n)$ определяется

Отображением $\Theta_g : R^n \to R^n, \Theta_g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + g_1, \ldots, x_n + g_n).$

Корректно определено отображение

$$T_g = \Psi \circ \Theta_g \circ \Psi^{-1} : R^n/Z^n \to R^n/Z^n, T_g\left(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}\right) = \left(e^{2\pi i(x_1+g_1)}, \ldots, e^{2\pi i(x_n+g_n)}\right),$$

кроме того, $\rho(T_g X, T_g Y) = \rho(X, Y).$ Мера Лебега на R^{2n} индуцирует б – алгебру измеримых множеств Λ и инвариантную относительно T_g меру $\lambda.$

О всюду плотных траекториях

Пусть $\{R^n/Z^n, \Lambda, T_g, \lambda\}$ динамическая система сдвиг на торе. Если $\exists \tilde{X} \in R^n/Z^n$ такая, что траектория $\{T_g^j \tilde{X} | j \in Z\}$ всюду плотна в R^n/Z^n, то $\forall X \in R^n/Z^n$ траектория $\{T_g^j X | j \in Z\}$ всюду плотна в R^n/Z^n.

Доказательство

Выберем произвольное $\varepsilon > 0.$ Поскольку R^n/Z^n компакт и множество $\left\{T_g^j\tilde{X} \middle| j \in Z\right\}$ всюду плотно в R^n/Z^n, $\exists N > 0$ такое, что $\left\{T_g^j\tilde{X} \middle| j \in Z, |j| \le N\right\}$ образует ε - сеть в R^n/Z^n.

Следовательно, $\exists j_0 \in Z : |j_0| \le N, \rho\left(T_g^{j_0}\tilde{X}, X\right) < \varepsilon.$

Выберем $\forall W \in R^n/Z^n$. Отметим, что

$$\rho\left(W, T_g^k X\right) \le \rho\left(W, T_g^{k+j_0}\tilde{X}\right) + \rho\left(T_g^{k+j_0}\tilde{X}, T_g^k X\right) =$$

$$= \rho\left(W, T_g^{k+j_0}\tilde{X}\right) + \rho\left(T_g^{j_0}\tilde{X}, X\right) \le \rho\left(W, T_g^{k+j_0}\tilde{X}\right) + \varepsilon$$

Доказательство

Поскольку множество $\left\{T_g^j\tilde{X} \middle| j\in Z, |j|\le N\right\}$

всюду плотно в R^n/Z^n, то $\exists k\in Z: |k+j_0|\le N, \rho\left(W, T_g^{k+j_0}\tilde{X}\right)<\varepsilon.$

Заметим, что $\rho\left(W, T_g^k\tilde{X}\right)<2\varepsilon,\ |k|\le 2N.$

Следовательно, $\left\{T_g^jX \middle| j\in Z, |j|\le 2N\right\}$ образует

2ε - сеть в R^n/Z^n. Потому траектория $\left\{T_g^jX \middle| j\in Z\right\}$,

всюду плотна в R^n/Z^n.

Теорема Вейля- фон Неймана

Для того, чтобы сдвиг на торе $\left\{ \mathrm{R}^n / \mathrm{Z}^n, \Lambda, \mathrm{T}_g, \lambda \right\}$,

где $g = \left(g_1, ..., g_n \right)$, был эргодической системой

необходимо и достаточно, чтобы числа

$g_1, ..., g_{n,} 1$ были рационально независимыми,

т.е. $r_1 g_1 + ... + r_n g_n = r_0, r_0 \in Z, ..., r_n \in Z \Rightarrow r_0 = r_1 = ... = r_n = 0.$

Доказательство

Достаточность. Пусть $f\left(T_g x\right)=f(x)$ п.в.

Достаточно доказать, что $f(x)=\mathrm{const}$ п.в.

Без ограничения общности можно считать, что $f(x)\in L_\infty\left(R^n/Z^n\right)$. Действительно, в противном случае рассмотрим

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), \text{если} \left|f(x)\right|\le N, \\ 0, \quad \text{если} \left|f(x)\right|>N, \end{cases}$$

Покажем, что $f_N(x)=\mathrm{const}$ п.в. и перейдем $N\to+\infty$.

Доказательство

Разложим $f(x) \in L_\infty\left(R^n/Z^n\right) \subset L_2\left(R^n/Z^n\right)$ в сходящийся в $L_2\left(R^n/Z^n\right)$ ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{r \in Z^n} c_r e^{2\pi i(r,x)}, \text{ где } c_r = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i(r,x)} dx_1 \ldots dx_n .$$

Тогда

$$f\left(T_g x\right) = \sum_{r \in Z^n} c_r e^{2\pi i(r,x+g)} = \sum_{r \in Z^n} c_r e^{2\pi i(r,g)} e^{2\pi i(r,x)}.$$

Поскольку $f\left(T_g x\right) = f(x)$, $\forall r \in Z^n$ $c_r e^{2\pi i(r,g)} = c_r$.

Заметим, что

$$e^{2\pi i(r,g)} \neq 1 \text{ при } r \in Z^n \setminus \{0\} \Rightarrow c_r = 0 \text{ при } r \in Z^n \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) = c_0.$$

Доказательство

Необходимость. Допустим противное, что

$$\exists r \in Z^n : (r, g) \in Z.$$

Тогда функция $f(x) = e^{2\pi i (r,x)}$ является инвариантной, т.к.

$$f(T_g x) = e^{2\pi i (r, x+g)} = e^{2\pi i (r,g)} e^{2\pi i (r,x)} = e^{2\pi i (r,x)} = f(x).$$

Следовательно, $\{R^n / Z^n, \Lambda, T_g, \lambda\}$ не эргодическая.

Следствие (Кронекер - Вейль)

Пусть числа $g_1,\dots,g_{n,}1$ рационально независимы. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\forall X=\left(x_1,\dots,x_n\right)\in R^n\,\exists t\in Z,k_1\in Z,\dots,k_n\in Z:\left|x_j-tg_j-k_j\right|<\varepsilon\ \ j=1,\dots,n.$$

Доказательство. Сдвиг на торе $\left\{R^n/Z^n,\Lambda,T_g,\lambda\right\}$ является эргодическим в условиях теоремы. Следовательно, траектория $\left\{T_g^j0\middle|j\in Z\right\}$ всюду плотна $\Rightarrow\forall\varepsilon>0\exists t\in Z:\rho\left(\Psi X,T_g^t0\right)<\varepsilon.$

Сдвиги на окружности

Определение. Будем говорить, что последовательность точек $\{x_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$ равномерно распределена на окружности S, если для любой дуги $\Delta \subseteq S$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_\Delta(x_j) = \lambda(\Delta).$$

Лемма 6.

Для того, чтобы последовательность точек $\left\{x_j \,\middle|\, j=1,2,\dots\right\}$ была равномерно распределена на окружности S достаточно, чтобы

$$\forall f(x)\in C(S)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_j\right)=\int_S f(x)\,dx.$$

Доказательство

Пусть Δ произвольная дуга на S.

Зафиксируем ε>0. Выберем такие функции

$f^{+}(x) \in C(S), f^{-}(x) \in C(S)$ такие, что

$$1. \forall x \in S \; f^{-}(x) \le \chi_{\Delta}(x) \le f^{+}(x);$$

$$2. \int_{S} \left(f^{+}(x) - f^{-}(x)\right) dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f^{-}\left(x_j\right) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Delta}\left(x_j\right) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f^{+}\left(x_j\right).$$

Доказательство

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем, что

$$\lambda(\Delta) - \varepsilon \le \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Delta}(x_j) \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Delta}(x_j) \le \lambda(\Delta) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Delta}(x_j) = \lambda(\Delta).$$

Теорема Боля-Серпинского-Вейля

Пусть g иррациональное число. Тогда для любого $x_0 \in S$ последовательность $\{x_0 + kg \mid k = 0, 1, \ldots\}$ равномерно распределена на окружности S.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\forall f(x) \in C(S), \forall x_0 \in S \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_0 + kg) = \int_S f(x)\,dx. \quad (1)$$

В силу эргодичности (1) выполнено для п.в. $x_0 \in S$.

Доказательство

Покажем, что если (1) выполнено хотя бы для одной точки $x_0 \in S,$ то (1) выполнено для любой точки $x \in S.$ Зафиксируем $\varepsilon > 0.$ Непрерывная функция $f(x)$ равномерно непрерывна на компакте S. Следовательно,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in S, \forall y \in S \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, $\max\limits_{x \in S} |f(x)| = M < +\infty.$

Доказательство

Так как траектория $\{x_0 + kg | k \in Z\}$ всюду плотна на S, $\exists m \in Z : |x - x_0 - mg| < \delta.$

Тогда

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+kg) - \frac{1}{n+m} \sum_{k=0}^{n+m-1} f(x_0+kg) \right| \le \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(f(x+kg) - f\big(x_0 + (k+m)g\big) \Big) \right| +$$

$$+ \frac{|m|}{|n+m|} \max_{x \in S} |f(x)| + \frac{|m|}{|n+m| n} \sum_{k=m}^{n+m-1} |f(x_0+kg)|$$

Существует $\hat{n} > 0$ такое, что $n \ge \hat{n} \Rightarrow \frac{|m|}{|n+m|} M < \frac{\varepsilon}{3}.$

Доказательство

Откуда получаем, что при $n \geq \hat{n}$ имеем

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + kg\right) - \frac{1}{n+m} \sum_{k=0}^{n+m-1} f\left(x_0 + kg\right) \right| < \varepsilon.$$

Поскольку

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+m} \sum_{k=0}^{n+m-1} f\left(x_0 + kg\right) = \int_S f\left(x\right) dx,$$

Получаем в силу произвольности ε>0, что

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + kg\right) = \int_S f\left(x\right) dx.$$

Следствие

Поворот окружности на иррациональный угол имеет единственную вероятностную борелевскую меру.

Доказательство. Пусть μ инвариантная вероятностная борелевская мера. Мера μ однозначно определяется линейным функционалом на C(S) $\int_S f(x)\mu(dx)$ для $f(x) \in C(S)$.

Доказательство

По теореме Биркгофа-Хинчина с учетом эргодичности для п.в. (по мере μ) $x \in S$ имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + kg\right) = \int_S f\left(x\right) \mu\left(dx\right).$$

По теореме Боля-Серпинского-Вейля имеем

$$\forall x \in S \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + kg\right) = \int_S f\left(x\right) dx.$$

Доказательство

Откуда следует, что

$$\forall f(x) \in C(S) \ \int_S f(x)\mu(dx) = \int_S f(x)\,dx \Rightarrow \mu(dx) = dx.$$

Строгая эргодичность

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ называется строго эргодической, если она имеет единственную инвариантную вероятностную меру.

P.S. Из строгой эргодичности следует Эргодичность.

Пример: распределение первых цифр в десятичной записи 2^n

2,4,8,1,3,6, …

Число в десятичной записи имеет вид

$$2^n = k_0 10^r + k_1 10^{r-1} + \ldots, \text{ где } 0 < k_0 \le 9; 0 \le k_1 \le 9;$$

$$\Rightarrow k_0 10^r \le 2^n < (k_0 + 1) 10^r \Rightarrow r + \lg k_0 \le n \lg 2 < r + \lg(k_0 + 1),$$

$$\Rightarrow \lg k_0 \le \{n \lg 2\} < \lg(k_0 + 1).$$

Число $\lg 2 = \log_{10} 2$ иррациональное. Обозначим

$$\Delta_k = \left[\log_{10} k, \log_{10}(k+1)\right), k = 1, \ldots, 9.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\Delta_k}\left(\{ j \log_{10} 2\}\right) = \lambda(\Delta_k) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Эргодичность динамической системы в непрерывном времени

Определение. Абстрактная динамическая система в непрерывном времени $\{M, \Sigma, T^t, \mu\}$ называется эргодической, если $\forall f(x) \in L_1(M, \mu)$ для п.в. (по мере μ) $x \in M$ справедливо, что

$$f^*(x) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \int_0^N f(T^t x) dt = \int_M f(x) \mu(dx).$$

Пример

Динамическая система сдвиг на торе в непрерывном времени $\left\{ R^n / Z^n, \Lambda, T_g^t, \lambda \right\}, g = \left(g_1, \ldots, g_n \right) \in R^n,$

где

$$T_g^t = \Psi \Xi_g^t \Psi^{-1} : R^n / Z^n \to R^n / Z^n,$$

$$\Xi_g^t \left(x_1, \ldots, x_n \right) = \left(x_1 + tg_1, \ldots, x_n + tg_n \right),$$

$$T_g^t \left(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n} \right) = \left(e^{2\pi i \left(x_1 + tg_1 \right)}, \ldots, e^{2\pi i \left(x_n + tg_n \right)} \right).$$

Теорема

Динамическая система сдвиг на торе $\left\{ R^n / Z^n, \Lambda, T_g^t, \lambda \right\}$ является эргодической тогда и только тогда, когда числа $g_1, \ldots, g_n$ рационально независимы, т.е.

$$r_1 g_1 + r_2 g_2 + \ldots + r_n g_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 \ldots = r_n = 0.$$

Доказательство

Достаточность. Функция $f^*(x) \in L_1(R^n/Z^n)$ и п.в. (по мере μ) $f^*(T_g^t x) = f^*(x)$. Без ограничения общности можно считать, что $f^*(x) \in L_\infty(R^n/Z^n)$. Разложим функцию $f^*(x)$ в ряд Фурье сходящийся в $L_2(R^n/Z^n)$

$$f^*(x) = \sum_{r \in Z^n} c_r e^{2\pi i (r,x)}, \text{ где } c_r = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f^*(x) e^{-2\pi i (r,x)} dx_1 \ldots dx_n.$$

Доказательство

Тогда

$$f^*\left(T_g^t x\right) = \sum_{r\in Z^n} c_r e^{2\pi i(r,x+tg)} = \sum_{r\in Z^n} c_r e^{2\pi it(r,g)} e^{2\pi i(r,x)} \Rightarrow \forall r \in Z^n \forall t \ge 0 \ c_r = c_r e^{2\pi it(r,g)}.$$

Следовательно, $c_r = 0$ при $r \in Z^n \setminus \{0\} \Rightarrow f^*(x) = c_0$ п.в.

Из

$$\int_{R^n/Z^n} f^*(x)dx = \int_{R^n/Z^n} f(x)dx$$

получаем, что

$$f^*(x) = \int_{R^n/Z^n} f(x)dx.$$

Доказательство

Необходимость. Допустим противное, что

$$r_1 g_1 + \ldots + r_n g_n = 0, r = (r_1, \ldots, r_n) \in Z^n \setminus \{0\}.$$

Положим $\tilde{f}(x) = e^{2\pi i (r,x)}$. Тогда

$$\tilde{f}^*(x) = \tilde{f}(x), \int\limits_{R^n/Z^n} \tilde{f}(x) dx = 0 \Rightarrow \tilde{f}^*(x) \neq \int\limits_{R^n/Z^n} \tilde{f}(x) dx.$$

Динамическая система не является эргодической.

Задача Лагранжа о среднем движении

Пусть $z(t)=\sum_{j=1}^{n} a_j e^{2\pi i g_j t} \neq 0, a_j=|a_j| e^{2\pi i \psi_j} \in C, g_j \in R, j=1,\ldots,n.$

Предположим, что $g_1,\ldots,g_n$ рационально независимы. Справедливо представление

$$z(t)=r(t)e^{2\pi i\varphi(t)}.$$

Вопрос Лагранжа: существует ли предел

$$\omega=\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}?$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Заметим, что

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln} z(t).$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i\, z(t)}\frac{dz(t)}{dt}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j a_j e^{2\pi i g_j t}}{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{2\pi i g_j t}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j \left|a_j\right| e^{2\pi i\left(g_j t+\psi_j\right)}}{\sum_{j=1}^{n} \left|a_j\right| e^{2\pi i\left(g_j t+\psi_j\right)}}\right).$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Рассмотрим функцию на R^n / Z^n

$$f\left(\psi_1,\ldots,\psi_n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} g_j \left|a_j\right| e^{2\pi i \psi_j}}{\sum_{j=1}^{n} \left|a_j\right| e^{2\pi i \psi_j}}\right).$$

Тогда

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f\left(\psi_1 + g_1 t,\ldots,\psi_n + g_n t\right) \Rightarrow \varphi\left(t_2\right) - \varphi\left(t_1\right) = \int_{t_1}^{t_2} f\left(\psi_1 + g_1\tau,\ldots,\psi_n + g_n\tau\right) d\tau.$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\left(\psi_1+g_1\tau,\dots,\psi_n+g_n\tau\right)d\tau.$$

Сдвиг на торе T_g эргодическая система

$$\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\int_0^1\dots\int_0^1 f\left(\psi_1,\dots,\psi_n\right)d\psi_1\dots d\psi_n=$$

$$=\operatorname{Re}\int_0^1\dots\int_0^1\left(\frac{\sum_{j=1}^n g_j\left|a_j\right|e^{2\pi i\psi_j}}{\sum_{j=1}^n\left|a_j\right|e^{2\pi i\psi_j}}\right)d\psi_1\dots d\psi_n=\sum_{j=1}^n g_jW_j.$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Здесь

$$W_k = \mathrm{Re}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\frac{|a_k| e^{2\pi i \psi_k}}{\sum_{j=1}^{n} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right) d\psi_1 \ldots d\psi_n =$$

$$= \mathrm{Re}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{|a_k| e^{2\pi i \psi_k}}{|a_k| e^{2\pi i \psi_k} + \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right) d\psi_k \right) d\psi_1 \ldots d\psi_{k-1} d\psi_{k+1} \ldots d\psi_n .$$

Задача Лагранжа о среднем движении

Заметим, что

$$\int_0^1 \left(\frac{|a_k| e^{2\pi i \psi_k}}{|a_k| e^{2\pi i \psi_k} + \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} \right) d\psi_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z_k| = |a_k|} \frac{dz_k}{z_k + \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j}} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{если} \left| \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \right| < |a_k|, \\ 0, \text{если} \left| \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \right| > |a_k|. \end{cases}$$

Следовательно, $W_k = P\left\{ \left(\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n \right) \middle| \left| \sum_{j \neq k} |a_j| e^{2\pi i \psi_j} \right| < |a_k| \right\}.$

Перемешивание

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ является системой с перемешиванием, если

$$\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma \lim_{j \to +\infty} \mu\left(T^{-j} A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B).$$

P.S. Система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ эргодическая, если $\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu\left(T^{-j} A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B).$

Связь перемешивания с эргодичностью

Динамическая система с перемешиванием является эргодической.

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma, T^{-1}A = A, B = M \setminus A.$

Тогда

$$T^{-j}A \cap B = \varnothing, \ j = 0,1,\ldots \Rightarrow \mu\left(T^{-j}A \cap B\right) = 0 \Rightarrow \mu(A)\mu(B) = 0.$$

Следовательно, $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1.$

Пример «сдвиг на торе»

Сдвиг на торе не является перемешиванием. Доказательство. Если $g_1,...,g_n,1$ не являются рационально независимыми, то сдвиг на торе $\left\{R^n/Z^n, \Lambda, T_g, \lambda\right\}$ по теореме Вейля-фон Неймана не является эргодическим и, значит, не является перемешиванием.

Предположим, теперь, что $g_1,...,g_n,1$ рационально независимы.

Пример «сдвиг на торе»

Выберем $f(x) = e^{2\pi i(r,x)}, g(x) = e^{-2\pi i(r,x)}, r \in Z^n \setminus \{0\}.$

Тогда

$$\int\limits_{R^n/Z^n} f(x)dx_1 \ldots dx_n = 0, \int\limits_{R^n/Z^n} g(x)dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

$$\int\limits_{R^n/Z^n} f(T_g^m x) g(x)dx_1 \ldots dx_n = e^{2\pi i m(r,g)},$$

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_{R^n/Z^n} f(T_g^m x) g(x)dx_1 \ldots dx_n \neq 0.$$

Критерий перемешивания

Определение. Совокупность измеримых множеств $\Upsilon \subseteq \Sigma$ называется плотной, если

$$\forall A \in \Sigma, \forall \varepsilon > 0\ \exists A^{*} \in \Upsilon : \mu\left(A \vartriangle A^{*}\right) < \varepsilon.$$

Совокупность измеримых множеств $\Gamma \subseteq \Sigma$ называется достаточной, если конечные объединения непересекающихся элементов из Γ образуют плотную систему.

Критерий перемешивания

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система и $\Gamma \subseteq \Sigma$ достаточная совокупность измеримых множеств. Если

$$\forall A \in \Gamma, \forall B \in \Gamma \lim_{j \to +\infty} \mu\left(T^{-j} A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B),$$

то $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ динамическая система с перемешиванием.

Доказательство

Пусть $A_1 \in \Gamma, \ldots, A_k \in \Gamma, B_1 \in \Gamma, \ldots, B_m \in \Gamma,$

$$A_i \cap A_j = \varnothing, B_i \cap B_j = \varnothing \text{ для } i \neq j,$$

$$A' = \bigcup_{i=1}^{k} A_i, B' = \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

Тогда

$$\mu(A') = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i), \mu(B') = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j), \mu(T^{-n}A' \cap B') = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \mu(T^{-n}A_i \cap B_j).$$

По условию

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(T^{-n}A_i \cap B_j) = \mu(A_i)\mu(B_j), i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m.$$

Доказательство

Следовательно,

$$\forall A' \in \Upsilon, \forall B' \in \Upsilon \lim_{n \to +\infty} \mu\left(T^{-n} A' \cap B'\right) = \mu(A')\mu(B'),$$

где Υ плотная совокупность измеримых множеств. Пусть теперь $\forall A \in \Sigma, \forall B \in \Sigma, \forall \varepsilon > 0.$

Найдем $A' \in \Upsilon, B' \in \Upsilon : \mu(A \vartriangle A') < \dfrac{\varepsilon}{4}, \mu(B \vartriangle B') < \dfrac{\varepsilon}{4}.$

Тогда

$$\left|\mu\left(T^{-n} A \cap B\right) - \mu(A)\mu(B)\right| \le \mu\left(T^{-n}(A \vartriangle A')\right) + \mu\left(T^{-n} A' \cap (B \vartriangle B')\right) +$$

$$+\left|\mu\left(T^{-n} A' \cap B'\right) - \mu(A')\mu(B')\right| + \mu(A)\mu(B \vartriangle B') + \mu(B')\mu(A \vartriangle A') \le$$

$$\le \left|\mu\left(T^{-n} A' \cap B'\right) - \mu(A')\mu(B')\right| + \varepsilon.$$

Символическая динамика

Обозначим

$$\Omega_N = \left\{ \omega = \left(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots \right) \middle| \omega_i \in \{0,1,\ldots,N-1\} \text{ для } i \in Z \right\}$$

фазовое пространство. Пусть

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Цилиндром k-го порядка называется множество $C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \left\{ \omega \in \Omega_N \middle| \omega_{n_i} = \alpha_i \text{ для } i = 1,\ldots,k \right\}.$

Обозначим Π наименьшую б - алгебру, содержащую все цилиндры.

Символическая динамика

Определим отображение сдвига

$$\sigma_N : \Omega_N \to \Omega_N, \sigma_N(\omega) = \omega', \forall n \in Z \ \omega'_n = \omega_{n+1},$$

$$\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots), \omega' = (\ldots, \omega'_{-1}, \omega'_0, \omega'_1, \ldots).$$

Мера μ инвариантна, если для любого цилиндра $C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ справедливо, что

$$\mu\left(\sigma_N^{-1}\left(C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right)\right) = \mu\left(C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right).$$

Символическая динамическая система

$$\{\Omega_N, \Pi, \sigma_N, \mu\}, \mu(\Omega_N) = 1.$$

Сдвиг Бернулли $B(p_0,\dots,p_{N-1})$

Пусть $p_0 > 0,\dots,p_{N-1} > 0, \sum_{j=0}^{N-1} p_j = 1.$

Если для любого цилиндра $C_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}^{n_1,\dots,n_k}$ выполнятся

$\mu\left(C_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}^{n_1,\dots,n_k}\right) = p_{\alpha_1}\dots p_{\alpha_k}$, то символическая система

$\{\Omega_N, \Pi, \sigma_N, \mu\}, \mu(\Omega_N) = 1$ называется сдвигом

Бернулли $B(p_0,\dots,p_{N-1})$.

Предложение. Сдвиг Бернулли $B(p_0,\dots,p_{N-1})$ является перемешиванием.

Доказательство

Рассмотрим два произвольных цилиндра

$$C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}, C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}.$$

Заметим, что для достаточно больших j>0

$$\sigma_N^{-j}\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right)=C^{n_1+j,\dots,n_k+j}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}, C^{n_1+j,\dots,n_k+j}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\cap C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}=C^{m_1,\dots,m_t,n_1+j,\dots,n_k+j}_{\beta_1,\dots,\beta_t,\alpha_1,\dots,\alpha_k}.$$

Тогда

$$\mu\left(\sigma_N^{-j}\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right)\cap C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}\right)=\mu\left(C^{m_1,\dots,m_t,n_1+j,\dots,n_k+j}_{\beta_1,\dots,\beta_t,\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right)=$$

$$=p_{\beta_1}\dots p_{\beta_t}p_{\alpha_1}\dots p_{\alpha_k}=\mu\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right)\mu\left(C^{m_1,\dots,m_t}_{\beta_1,\dots,\beta_t}\right).$$

Критерий перемешивания

Абстрактная динамическая система

$\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ является перемешиванием

тогда и только тогда, когда

$$\forall f(x) \in L_2(M, \mu), \forall g(x) \in L_2(M, \mu)$$

справедливо, что

$$\lim_{j \to +\infty} \int_M f(T^j x) g(x) \mu(dx) = \int_M f(x) \mu(dx) \int_M g(x) \mu(dx).$$

P.S. Критерий эргодичности

Система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ является эргодической, если и только если $\forall f(x) \in L_2(M, \mu), \forall g(x) \in L_2(M, \mu)$ справедливо

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_M f\left(T^j x\right) g(x) \mu(dx) = \int_M f(x) \mu(dx) \int_M g(x) \mu(dx).$$

Доказательство критерия перемешивания

Достаточность. Полагая $f(x)=\chi_A(x), g(x)=\chi_B(x)$,

получаем, что

$$\int\limits_M f\left(T^j x\right) g(x)\mu(dx)=\int\limits_M \chi_{T^{-j}A}(x)\chi_B(x)\mu(dx)=\mu\left(T^{-j}A\cap B\right),$$

$$\int\limits_M f(x)\mu(dx)=\int\limits_M \chi_A(x)\mu(dx)=\mu(A), \int\limits_M g(x)\mu(dx)=\int\limits_M \chi_B(x)\mu(dx)=\mu(B).$$

Откуда $\lim\limits_{j\to+\infty}\mu\left(T^{-j}A\cap B\right)=\mu(A)\mu(B).$

Доказательство критерия перемешивания

Необходимость. Из определения перемешивания следует, что соотношение

$$\lim_{j\to+\infty}\int_M f\left(T^j x\right) g(x)\,\mu(dx) = \int_M f(x)\,\mu(dx) \int_M g(x)\,\mu(dx)$$

выполняется для простых функций, а, значит, в силу его билинейности по $f(x)$ и $g(x)$ выполняется для простых функций. Пусть $\forall\varepsilon > 0$. Для произвольных $f(x)\in L_2(M,\mu), g(x)\in L_2(M,\mu)$ выберем простые функции $\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)$ так, чтобы

$$\left\|f(x)-\tilde{f}(x)\right\|_{L_2(M,\mu)} < \varepsilon, \left\|g(x)-\tilde{g}(x)\right\|_{L_2(M,\mu)} < \varepsilon.$$

Доказательство критерия перемешивания

Тогда

$$\left|\int_M f\left(T^j x\right) g(x)\mu(dx) - \int_M f(x)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx)\right| \le \left|\int_M f\left(T^j x\right)\left(g(x)-\tilde{g}(x)\right)\mu(dx)\right| +$$

$$+\left|\int_M \left(f\left(T^j x\right)-\tilde{f}\left(T^j x\right)\right)\tilde{g}(x)\mu(dx)\right| + \left|\int_M \tilde{f}\left(T^j x\right)\tilde{g}(x)\mu(dx) - \int_M \tilde{f}(x)\mu(dx)\int_M \tilde{g}(x)\mu(dx)\right| +$$

$$+\left|\int_M \tilde{f}(x)\mu(dx)\int_M \left(\tilde{g}(x)-g(x)\right)\mu(dx)\right| + \left|\int_M \left(\tilde{f}(x)-f(x)\right)\mu(dx)\int_M g(x)\mu(dx)\right| \le$$

$$\left|\int_M \tilde{f}\left(T^j x\right)\tilde{g}(x)\mu(dx) - \int_M \tilde{f}(x)\mu(dx)\int_M \tilde{g}(x)\mu(dx)\right| + \varepsilon\left(\left\|f(x)\right\| + \left\|\tilde{g}(x)\right\| + \left\|\tilde{f}(x)\right\| + \left\|g(x)\right\|\right).$$

Усиление критерия перемешивания

Пусть Φ полная система функций в $L_2(M, \mu)$

Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ является перемешиванием тогда и только тогда, когда $\forall f(x) \in \Phi, \forall g(x) \in \Phi$ справедливо, что

$$\lim_{j \to +\infty} \int_M f(T^j x) g(x) \mu(dx) = \int_M f(x) \mu(dx) \int_M g(x) \mu(dx).$$

Лебеговские спектры

Определение. Будем говорить, что $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система обладает лебеговским спектром, если в $L_2(M, \mu)$ существует полный ортонормированный базис , образованный функцией $f_0(x) \equiv 1$ и функциями $\left\{ f_{i,j}(x) \middle| i \in I, j \in Z \right\}$ такими, что

$$\forall i \in I, \forall j \in Z \;\; U_T f_{i,j}(x) = f_{i,j}(Tx) = f_{i,j+1}(x).$$

Здесь $\mathbf{I}$ конечное или счетное множество.

Лебеговские спектры

Абстрактная динамическая система $\{M,\Sigma,T,\mu\},\mu(M)=1,$ обладающая лебеговским спектром является перемешивающей системой.

Доказательство. Достаточно проверить усиленный критерий для $f=f_{i,j}, g=f_{k,r}.$

Имеем $\left(U_T^n f, g\right)=\left(f_{i,j+n}, f_{k,r}\right)=0$ при $j+n\neq r.$

Задача

На окружности $S = \{ z \in C \| z | = 1 \}$ задано отображение $T : S \to S, Tz = z^2.$ Доказать, что

1. мера Лебега индуцирует инвариантную меру для отображения T;
2. динамическая система $\{S, \Lambda, \lambda, T\}$ является перемешиванием.